

Lösningar till MMG 300 II, 12 0110

④ Polära koordinater ger

$$\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^2 r^4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) r dr \right) d\theta = \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta$$

$$= \frac{63}{6} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} = \frac{21}{4}$$

⑤ Gauss' sats ger $\iiint (4x^2 + 2yz) dx dy dz = [\text{cyl. koordin.}] =$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (4r^3 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin \theta \cdot z) dz \right) d\theta dr =$$

$$= \left[r^4 \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 \left[\frac{2}{3} r^3 \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

⑥ $n \leq n + \frac{1}{n} \leq 2n \Rightarrow (n + \frac{1}{n})^{1/n} \rightarrow 1$ och $R=1$.

För $|x|=1$ får vi termer som ej går mot 0.
Serien är alltså konvergent för $-1 < x < 1$.

För $|x| < 1$ är $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ och deriverar vi:

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \text{ dvs } \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \left(\frac{x}{1-x} \right)^2$$

Integrerar vi så får vi istället

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Svar: $\sum_{n=1}^{\infty} (n + \frac{1}{n}) x^n = \frac{x}{(1-x)^2} - \ln(1-x)$ för $|x| < 1$.

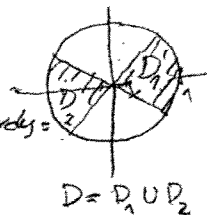
⑦ $z > 0$ och $x^2 + y^2 \leq 1$ ger området D i fig.

Av symmetriskäl får vi

$$\text{Arean} = 2 \iint_{D_1} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy =$$

$$= [\text{pol. koordin.}] = 2 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^1 r \sqrt{1+4r^2} dr d\theta \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} \left[(1+4r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{12} (5\sqrt{5}-1)$$



⑧ Sätt $f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$. Då är $f'_n = \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$ vilket visar att $|f_n|$ har maximum för $|x| = n^{-1/2}$.
Eftersom $|f_n(n^{-1/2})| = \frac{1}{2n^{\alpha+1/2}}$ så följer att

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^{\alpha+1/2}} \text{ för alla } x.$$

Vidare är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$ konvergent för $\alpha + 1/2 > 1$,
dvs för $\alpha > 1/2$ och påståendet följer
av Weierstrass' majorantsats.