

MMG 300-2
12-08-27
14.00 - 18.00

- ① Sats 9.2 i P.-B.
- ② Sats 6.2 i P.-B.
- ③ Sats 2.13 i GLO.

④ Arbetet ges av kurvintegralen

$$\begin{aligned} \int_C z dx + x dy + y z dz &= \{ \text{parameter framställd} \} = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{2\pi} (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + \sin t \cdot \frac{t}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} - 1 \right) \int_0^{2\pi} t \sin t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \{ \text{part. int. i ka int.} \} = \\ &= \frac{1-2\pi}{(2\pi)^2} \left([-t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt \right) + \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \\ &= \frac{1-2\pi}{(2\pi)^2} (-2\pi + 0) + \pi = \underline{\underline{\frac{2\pi-1}{2\pi} + \pi}} \end{aligned}$$

⑤ Låt D vara området i planet som ges av $x^2 + y^2 \leq 1$

Om vi använder x, y som parametrar får vi

$$\begin{aligned} \text{Arean} &= \iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1+(2xy)^2+(x-2y)^2} dx dy = \\ &= \iint_D \sqrt{1+5(x^2+y^2)} dx dy = \{ \text{polära koordinater} \} = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1+5r^2} r dr \right) d\theta = \frac{2\pi}{15} \left[(1+5r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2\pi(6\sqrt{6}-1)}{15}}} \end{aligned}$$

⑥ Låt Y beteckna den givna ytan och låt D vara enhetsskivan i xy -planet med normal "uppåt".

Da är $Y-D$ en sluten yta med normal utåt.

Eftersom $\text{div} F = z - z + 0 = 0$ så ger Gauss sats:

$$\begin{aligned} \iint F \cdot N dS &= \iint_{Y-D} F \cdot N dS + \iint_D F \cdot N dS = \{N=(0,0,1)\} = \iint_D x^2 dS = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r \cos \theta)^2 r dr \right) d\theta = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}} \end{aligned}$$

⑦ Rotkriteriet: $\left| \frac{1+n^2}{2^n} z^n \right|^{1/n} \rightarrow \frac{|z|}{2} < 1 \Leftrightarrow |z| < 2, R=2$.

Vi beräknar först $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$, för $-2 < x < 2$ och sätter sedan $x=1$.

Sätt $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$. Derivera och multiplicera med x : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n} = \frac{2x}{(2-x)^2}$. I gen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n} = x \frac{2(2-x)^2 + 4x(2-x)}{(2-x)^4} = \frac{2x^2+4}{(2-x)^3}.$$

$$\text{Så } f(x) = \frac{2}{2-x} + \frac{2x^2+4}{(2-x)^3} \text{ och } f(1) = \underline{\underline{8}}$$

⑧ $u_n(x) = \frac{x}{(x^2+n)^2} \Rightarrow |u_n(x)| \leq \frac{R}{n^2}$ för $x \in [0, R]$.

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{n^2}$ ju är konvergent så ger Weierstrass att serien är likformigt konvergent i $[0, R]$ och da R godtyckligt följer att $f(x)$ kontinuerlig i $[0, \infty[$. Vidare så ger satsen om termvis integration att

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{(x^2+n)^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+n} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \text{ som har delsummorna } S_k = \\ 2S_k &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} \rightarrow 1 \\ \text{da } k \rightarrow \infty \text{ Alltså } \int_0^1 f(x) dx &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$