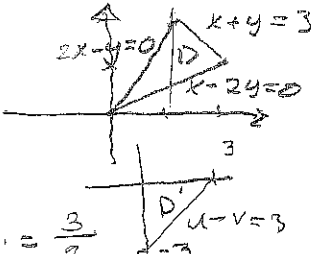


Lösningar till MMG300:2 15-06-03

- ① Sats 3.4 i GLO
- ② Sats 9.3 i P-B.
- ③ Sats 2.12 i GLO

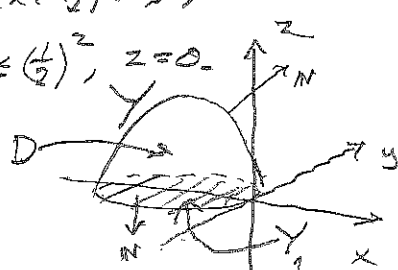
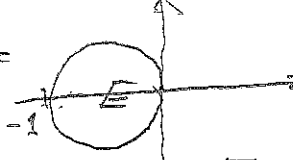
④ $P = (2x + x^2y)e^{xy}$, $Q = x^3e^{xy} + 1$
 Integrera Q : $\phi = x^2e^{xy} + y$. Då är $\phi'_x = P$.
 $\int_C = [x^2e^{xy} + y]_{(0,3)}^{(1,0)} = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$

⑤ Sätt $\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x - 2y \end{cases}$, $|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}| = 3$
 $x + y = u - v$
 $\iint_D y \, dx \, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \iint_{D'} (u - 2v) \, du \, dv =$
 $= \frac{1}{9} \int_0^3 [uv - v^2]_{u=3}^0 \, dv = \frac{1}{9} \int_0^3 (9 - 3v) \, dv = \dots = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$



⑥ $|(2)^{\frac{1}{n}} x|^{\frac{1}{n}} = 2|x| \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow 2|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$
 $R = \frac{1}{2}$. $x = \frac{1}{2}$ ger serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ som
 är konvergent enligt Leibniz.
 $x = -\frac{1}{2}$ ger $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som är divergent
 Serien är konvergent för $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$
 Vi vet att $\sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \frac{1}{1 - (-2x)} = \frac{1}{1+2x}$ om $|x| < \frac{1}{2}$.
 Integrerar vi får vi
 $\frac{1}{2} \ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \frac{x^n}{n}$
 Dvs, seriens summa = $-\ln(1+2x)$

⑦ $z = -(x^2 + y^2) = \frac{1}{4} - ((x + \frac{1}{2})^2 + y^2)$
 Lägg till ytan $Y: (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$, $z = 0$.
 Gauss sats ger
 $\iint_{Y \cup Y_1} = \iiint_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz = 0$
 $\iint_Y = \iint_{Y_1} = \{N = (0,0,1)\} =$
 $\iint_{E \cup E_1} (x+y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (x + \frac{1}{2}) \, r \, dr \, d\theta =$
 $= \int_0^{2\pi} [r^2 \cos \theta - \frac{r}{2} + r^2 \sin \theta]_{-1/2}^{1/2} d\theta =$
 $= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{24} (\cos \theta + \sin \theta) - \frac{1}{16}) d\theta = \underline{\underline{\frac{1}{12} - \frac{\pi}{8}}}$

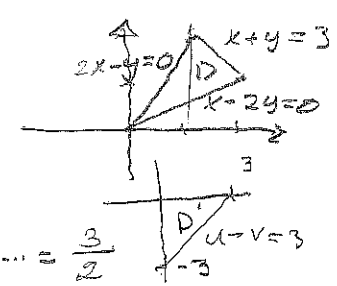
⑧ $f_n(x) = x^2 \frac{x^2 + n^2}{(x+n)^2} = x^2 \frac{1 + \frac{x^2}{n^2}}{(1 + \frac{x}{n})^2} \rightarrow x^2$ då $n \rightarrow \infty$
 Vi vill visa att konvergensen är likformig:
 $|f_n(x) - x^2| = |x^2 \frac{x^2 + n^2}{(x+n)^2} - \frac{(x+n)^2}{(x+n)^2}| =$
 $= |x^2 \frac{2xn}{(x+n)^2}| \leq \frac{2}{n} |x|^2 < \frac{2}{n} \rightarrow 0$ oberoende
 av x i $[0, 1]$. Det visar att konvergensen
 är likformig och vi får
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx =$
 $= \int_0^1 x^2 \, dx = \underline{\underline{1/3}}$

Lösningar till
MMG300:2 15-06-03

- ① Sats 3.4 i GLO
- ② Sats 9.3 i P-B.
- ③ Sats 2.12 i GLO

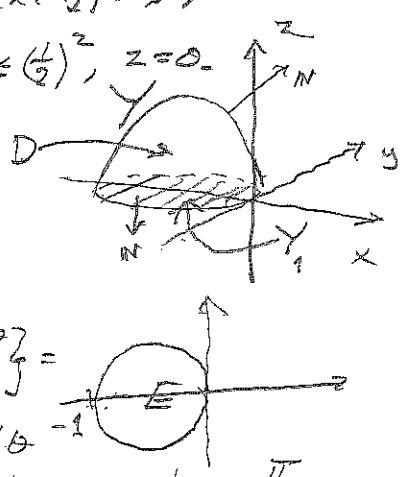
④ $P = (2x + x^2y)e^{xy}$, $Q = x^3e^{xy} + 1$
 Integrera Q : $\phi = x^2e^{xy} + y$. Då är $\phi'_x = P$.
 $\int_C = [x^2e^{xy} + y]_{(0,3)}^{(1,0)} = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$

⑤ Sätt $\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x - 2y \end{cases}$, $|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}| = 3$
 $x + y = u - v$
 $\iint_D y \, dx \, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \iint_{D'} (u - 2v) \, du \, dv =$
 $= \frac{1}{9} \int_0^3 [uv - v^2]_{u=3}^0 \, dv = \frac{1}{9} \int_0^3 (9 - 3v) \, dv = \dots = \frac{3}{2}$



⑥ $|(x-2)^n x^{1/n}|^{1/n} = 2|x| \cdot \frac{1}{n^{1/n}} \Rightarrow 2|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$
 $R = \frac{1}{2}$. $x = \frac{1}{2}$ ger serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ som är konvergent enligt Leibniz.
 $x = -\frac{1}{2}$ ger $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som är divergent.
 Serien är konvergent för $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$.
 Vi vet att $\sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \frac{1}{1 - (-2x)} = \frac{1}{1+2x}$ om $|x| < \frac{1}{2}$.
 Integrerar vi får vi
 $\frac{1}{2} \ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \frac{x^n}{n}$
 Dvs, seriens summa = $-\ln(1+2x)$

⑦ $z = -(x + x^2 + y^2) = \frac{1}{4} - ((x + \frac{1}{2})^2 + y^2)$
 Lägg till ytan $Y: (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$, $z = 0$.
 Gauss sats ger
 $\iint_{Y+Y_1} = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 0$
 $\iint_Y = \iint_{Y_1} = \{N = (0,0,1)\} =$
 $\iint_{E_{2\pi, 1/2}} (x+y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (r \cos \theta + r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta =$
 $= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{24} (\cos \theta + \sin \theta) - \frac{1}{16}) \, d\theta = \frac{1}{12} - \frac{\pi}{8}$



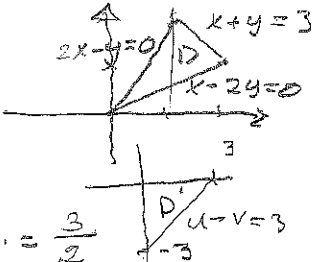
⑧ $f_n(x) = x^2 \frac{x^2 + n^2}{(x+n)^2} = x^2 \frac{1 + \frac{x^2}{n^2}}{(1 + \frac{x}{n})^2} \rightarrow x^2$ då $n \rightarrow \infty$
 Vi vill visa att konvergensen är likformig:
 $|f_n(x) - x^2| = |x^2 (\frac{x^2 + n^2}{(x+n)^2} - \frac{(x+n)^2}{(x+n)^2})| =$
 $= |x^2 \frac{2xn}{(x+n)^2}| \leq \frac{2}{n} |x|^3 < \frac{2}{n} \rightarrow 0$ oberoende av x i $[0, 1]$. Det visar att konvergensen är likformig och vi får
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx =$
 $= \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$

Lösningar till MMG300:2 15-06-03

- ① Sats 3.4 i GLO
- ② Sats 9.3 i P-B.
- ③ Sats 2.12 i GLO

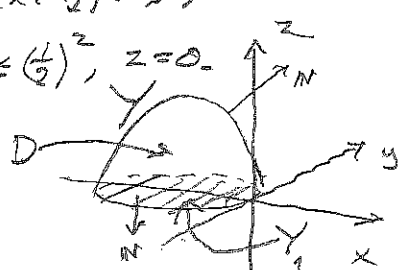
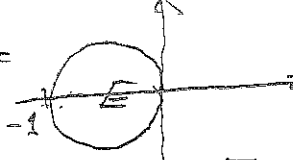
④ $P = (2x + x^2y)e^{xy}$, $Q = x^3e^{xy} + 1$
 Integrera Q : $\phi = x^2e^{xy} + y$. Då är $\phi' = P$.
 $\int_C [x^2e^{xy} + y]_{(0,3)}^{(1,0)} = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$

⑤ Sätt $\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x - 2y \end{cases}$, $|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}| = 3$
 $x + y = u - v$
 $\iint_D y \, dx \, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \iint_{D'} (u - 2v) \, du \, dv =$
 $= \frac{1}{9} \int_0^3 [uv - v^2]_{u=3}^0 \, dv = \frac{1}{9} \int_0^3 (9 - 3v) \, dv = \dots = \frac{3}{2}$



⑥ $|(x-2)^n x^{1/n}|^{1/n} = 2|x| \cdot \frac{1}{n^{1/n}} \Rightarrow 2|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$
 $R = \frac{1}{2}$. $x = \frac{1}{2}$ ger serien $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ som är konvergent enligt Leibniz.
 $x = -\frac{1}{2}$ ger $\sum \frac{1}{n}$ som är divergent.
 Serien är konvergent för $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$.
 Vi vet att $\sum_0^\infty (-2x)^n = \frac{1}{1 - (-2x)} = \frac{1}{1+2x}$ om $|x| < \frac{1}{2}$.
 Integrerar vi får vi
 $\frac{1}{2} \ln(1+2x) = \sum_0^\infty (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{2} \sum_1^\infty (-2)^n \frac{x^n}{n}$
 Dvs, seriens summa = $-\ln(1+2x)$

⑦ $z = -(x + x^2 + y^2) = \frac{1}{4} - ((x + \frac{1}{2})^2 + y^2)$
 Lägg till ytan $Y: (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$, $z = 0$.
 Gauss sats ger
 $\iint_{Y+Y_1} = \iiint_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz = 0$
 $\iint_Y = \iint_{Y_1} = \{N = (0, 0, 1)\} =$
 $\iint_{E \cap \{2\pi, 1/2\}} (x + y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (r \cos \theta + r \sin \theta) \, dr \, d\theta =$
 $= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{24} (\cos \theta + \sin \theta) - \frac{1}{16}) \, d\theta = \frac{1}{12} - \frac{\pi}{8}$

⑧ $f_n(x) = x^2 \frac{x^2 + n^2}{(x+n)^2} = x^2 \frac{1 + \frac{x^2}{n^2}}{(1 + \frac{x}{n})^2} \rightarrow x^2$ om $n \rightarrow \infty$
 Vi vill visa att konvergensten är likformig:
 $|f_n(x) - x^2| = |x^2 \frac{x^2 + n^2}{(x+n)^2} - \frac{(x+n)^2}{(x+n)^2}| =$
 $= |x^2 \frac{2xn}{(x+n)^2}| \leq \frac{2}{n} |x|^2 < \frac{2}{n} \rightarrow 0$ oberoende av x i $[0, 1]$. Det visar att konvergensten är likformig och vi får
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx =$
 $= \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$