Kortfattade lösningar
Linjär algebra II, MMG400
14 januari, 2013

1. (a) Sant. Matrisen har bara egenvärdet 2. Så $\mathbb{R}^2 = GE_2$ och alla vektorer är generaliserade egenvektorer till matrisen.

   (b) Sant. Genom att välja en bas B vet vi att matrisen $[T]_B$ är injektiv. Gaussellimination ger att matrisen har ett pivotelement i varje kolonn. Därför har den ett pivotelement i varje rad och alla ekvationer $[T]_B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbara.

   (c) Falskt. Om $p(t) = (t-1)(t+1) = t^2 - 1 \in \mathbb{P}_2$ så är $p(-1) = p(1) = 0$ och alltså $\langle p, p\rangle = 0$.

   (d) Sant. Varje vektor $\mathbf{v}$ är en generaliserad egenvektor till T. Så $(T-I)^k\mathbf{v} = 0$ för något k. Men enligt sats gäller då $(T-I)^3\mathbf{v} = 0$ och alltså är $(T-I)^3 = 0$.

   (e) Falskt. Spektralsatsen ger att det finns en ON-bas B så att $[T]_B$ är diagonal. Diagonalelementen är egenvärdena till T så minst ett av dem är i. Men $[T^*]_B = [T]_B^H$ och då $\bar{i} = -i \neq i$ är $[T]_B^H \neq [T]_B$.

2. Låt S vara standardbasen på $\mathbb{R}^2$. Då är $[I]_{SF} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En kalkyl ger $[I]_{FS} = [I]_{SF}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Detta ger

$$[T]_S = [I]_{SF}[T]_S[I]_{FS} = \ldots = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Eftersom S är en ON-bas gäller

$$[T^*]_S = [T_S]^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Till sist får vi $[T^*]_F = [I]_{FS}[T^*]_S[I]_{SF} = \ldots = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Matrisen A har egenvärdena -1 och 4 med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (1,1)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (2,1)$.

Vi ansätter $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2$. Då gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= a'(t)\mathbf{e}_1 + b'(t)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}''(t) &= a''(t)\mathbf{e}_1 + b''(t)\mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{x}(t) &= -a(t)\mathbf{e}_1 + 4b(t)\mathbf{e}_2 \ , \end{aligned}$$

så $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ger $a'' = -a$ och $b'' = 4b$.

Eftersom $\mathbf{x}(0) = (1,1) = \mathbf{e}_1$ och $\mathbf{x}'(0) = (3,2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och ger begynnelsevilkoren att $a(0) = 1$, $b(0) = 0$ och $a'(0) = b'(0) = 1$.

Så det gäller att lösa

$$I. \begin{cases} a''(t) = -a(t) \\ a(0) = 1, a'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{och } II. \begin{cases} b''(t) = 4b(t) \\ b(0) = 0, b'(0) = 1 \end{cases} .$$

I. Vi får $a(t) = A\cos t + B\sin t$, $a'(t) = -A\sin t + B\cos t$. Begynnelsevillkoren ger $A = a(0) = 1$ och $B = a'(0) = 1$. Så $a(t) = \cos t + \sin t$.

II. Nu får vi $b(t) = Ce^{2t} + De^{-2t}$, $b'(t) = 2Ce^{2t} - 2De^{-2t}$. Begynnelsevillkoren ger $C + D = b(0) = 0$ och $2C - 2D = b'(0) = 11$. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ 2C - 2D = 1 \end{cases} \quad \text{har lösningen } C = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{4}$$

Så vi får $\mathbf{x}(t) = (\cos t + \sin t)(1,1) + \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t})(2,1)$ eller

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos t + \sin t + \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t}) \\ x_2(t) = \cos t + \sin t + \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) \end{cases} .$$

4. Matrisen A har det dubbla egenvärdet 1. Låt $N = A - I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Observera att $N^2 = 0$. Lösningen ges av $\mathbf{x}(t) = e^{tA}x(0)$. Nu är

$$e^{tA} = e^{t(I+N)} = e^t e^{tN} = e^t(I + tN) = e^t \begin{pmatrix} 1-2t & 2t \\ -2t & 1+2t \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1-2t & 2t \\ -2t & 1+2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2t \\ 1+2t \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{cases} x_1(t) = (1-2t)e^t \\ x_2(t) = -2te^t \end{cases} .$$

5. För standardbasen $p_0 = 1$, $p_1 = t$, $p_2 = t^2$ och $p_3 = t^3$ gäller

$$Tp_0 = 0, \quad Tp_1 = 1 = p_0, \quad Tp_2 = 2t^2 + 2t = 2p_1 + 2p_2$$

och

$$Tp_3 = 6t^3 + 3t^2 = 3p_2 + 6p_3 \; .$$

Så

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena är 0 (dubbellt), 2 och 6. Egenvektorerna till egenvärdet 2 fås ur

$$[T]_S - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Med den fria variabeln $x_3 = 2$, får vi $x_4 = 0$, $x_2 = 2$ och $x_1 = 1$. Så $\mathbf{e} = (1, 2, 2, 0)$ är en egenvektor, $[T]_S\mathbf{e} = 2\mathbf{e}$. I invariant notation betyder det att om $P(t) = 1 + 2t + 2t^2$ så gäller $TP = 2P$.

Anmärkning. Egenvärdet 6 ger multiplar av polynomet $1 + 6t + 18t^2 + 24t^3$ som alltså också är en lösning. Egenvärdet 0 ger bara konstanta polynom som egenvektorer.

6. Se kurslitteraturen.