Matematik
Göteborgs universitet
Hasse Carlsson

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Hasse Carlsson
0703 - 08 83 04

Tentamensskrivning
Linjär algebra II, MMG400

Torsdagen den 22 augusti 2013, 8.30-12.30

Uppgifterna ger maximalt 4 poäng utom Uppgift 1 som kan ge 5 poäng.

1. Avgör för vart och ett av följande fyra påståenden om det är sant eller falskt. Motivera *kortfattat*. Rätt svar ger $\frac{1}{2}$ poäng, korrekt kortfattad motivering $\frac{1}{2}$ poäng.

   (a) Mängden $V = \{(x, y, z); x + 2y - z = 1\}$ är ett delrum till $\mathbb{R}^3$.

   (b) Låt
   $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1 \text{ där } \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2)\ .$$
   Då är $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$.

   (c) Vektorn $\mathbf{u} = (0, 1, 2)$ är en generaliserad egenvektor till matrisen
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (d) Det finns en reell 2×2-matris med $A^2 = -I$.

   (e) Det finns en symmetrisk reell 2×2-matris med $A^2 = -I$.

2. Lös rekursionsekvationen
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mathbf{x}_0 = (3, -1) \end{array} \right. \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\ .$$

Vänd!

3. Låt F vara basen $\mathbf{f}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{f}_2 = (1,0,1)$ och $\mathbf{f}_3 = (1,1,0)$. I denna bas har den linjära avbildningen T matrisen

$$[T]_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestäm $[T]_S$ där S är standardbasen på $\mathbb{R}^3$.

   (b) Bestäm matrisen $[T^*]_S$ där T^* är den adjungerade operatorn till T i standardskalärprodukten på $\mathbb{R}^3$.

   (c) Bestäm matrisen $[T^*]_F$.

   Räknehjälp?: Inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ är $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (3,2), \mathbf{x}'(0) = (1,0) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. Den linjära avbildningen T har matrisen

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   i standardbasen på $\mathbb{R}^3$. Den har ett enkelt egenvärde 1 och ett dubbellt egenvärde 2. Bestäm en bas B för $\mathbb{R}^3$ så att $[T]_B$ blir övre triangulär. Vad blir $[T]_B$ i denna bas?

6. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet.