Kortfattade lösningar
Linjär algebra II, MMG400
25 oktober, 2012

1. (a) Falskt. V är inte slutet under varken addition eller multiplikation med skalärer. T.ex. så gäller $\mathbf{v} = (0,1,1) \in V$ (ty $1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$), men $2\mathbf{v} = (0,2,2) \neq V$ (ty $1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2$).

   (b) Falskt. T.ex. om $\mathbf{x} = (1,0)$ så gäller $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

   (c) Sant. $(A - I)^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$ så $\mathbf{u}$ är en generaliserad egenvektor till egenvärdet 1.

   (d) Sant. Låt A vara matrisen för avbildningen ”vridning ett kvarts varv”. Då är A^2 matrisen för avbildningen ”vridning ett halvt varv”, dvs. $A^2 = -I$.

   Konkret: Om $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ så är $A^2 = -I$.

   (e) Falskt. Enligt reella spektralsatsen kan vi välja en (reell) ON-bas B så att $[A]_B$ är diagonal. Om $[A]_B^2 = -I$ uppfyller diagonalelementen $d_{ii}^2 = -1$ som saknar reell lösning.

2. Lösningen ges av $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$.

   En kalkyl ger att matrisen A har egenvärdena 1 och 2 med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (2,-1)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (1,-1)$.

   Dessutom är $\mathbf{x}_0 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Vi får

$$\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0 = A^n(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 2A^n\mathbf{e}_1 - A^n\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_1 - 2^n\mathbf{e}_2$$

   eller

$$\mathbf{x}_n = (4 - 2^n, 2^n - 2) \ .$$

3. (a) Vi har $[T]_S = [I]_{SF}[T]_S[I]_{FS} = [I]_{SF}[T]_S[I]_{SF}^{-1}$.

$$\text{Nu är } [I]_{SF} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och (enligt Räknehjälpen)}$$

$$[I]_{FS} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

   Matrismultiplikation ger $[T]_S = [I]_{SF}[T]_S[I]_{FS} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Eftersom S är en ortonormerad bas är

$$[T^*]_S = [T]_S^* = [T]_S^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(c) Nu gäller $[T^*]_F = [I]_{FS}[T^*]_S[I]_{SF}$ och matrismultiplikation ger

$$[T^*]_F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

4. Matrisen A har egenvärdena -1 och 4 med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (1,1)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (2,1)$.

Vi ansätter $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2$. Då gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= a'(t)\mathbf{e}_1 + b'(t)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}''(t) &= a''(t)\mathbf{e}_1 + b''(t)\mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{x}(t) &= -a(t)\mathbf{e}_1 + 4b(t)\mathbf{e}_2 \ , \end{aligned}$$

så $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ger $a'' = -a$ och $b'' = 4b$.

Eftersom $\mathbf{x}(0) = (3,2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{x}'(0) = (1,0) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ ger begynnelsevilkoren att $a(0) = 1$, $b(0) = 1$, och $a'(0) = -1$ och $b'(0) = 1$.

Så det gäller att lösa

$$I. \ \begin{cases} a''(t) = -a(t) \\ a(0) = 1, a'(0) = -11 \end{cases} \quad \text{och } II. \ \begin{cases} b''(t) = 4b(t) \\ b(0) = 1, b'(0) = 1 \end{cases} .$$

I. Vi får $a(t) = A\cos t + B\sin t$, $a'(t) = -A\sin t + B\cos t$. Begynnelsevillkoren ger $A = a(0) = 1$ och $B = a'(0) = -1$. Så $a(t) = \cos t - \sin t$.

II. Nu får vi $b(t) = Ce^{2t} + De^{-2t}$, $b'(t) = 2Ce^{2t} - 2De^{-2t}$. Begynnelsevillkoren ger $C + D = b(0) = 1$ och $2C - 2D = b'(0) = 1$. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} C + D = 1 \\ 2C - 2D = 1 \end{cases} \quad \text{har lösningen } C = \frac{3}{4}, D = \frac{1}{4}$$

Så vi får $\mathbf{x}(t) = (\cos t - \sin t)(1,1) + \dfrac{1}{4}(3e^{2t} + e^{-2t})(2,1)$ eller

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos t - \sin t + \frac{1}{2}(3e^{2t} + e^{-2t}) \\ x_2(t) = \cos t - \sin t + \frac{1}{4}(3e^{2t} + e^{-2t}) \end{cases} .$$

5. Vi börjar med att bestämma egenvektorerna.

   Då $\lambda = 1$ har vi

$$[T - I]_S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   så $\mathbf{e}_1 = (-1, 1, 1)$ är en egenvektorer till egenvärdet 1.

   När $\lambda = 2$ har vi

$$[T - 2I]_S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Vi ser att $\mathbf{e}_2 = (-1, 1, 0)$ är en egenvektorer till egenvärdet 2, men också att det bara finns en fri variabel så egenrummet har dimensionen 1. Vi bestämmer därför en generaliserad egenvektor.

   Vi har

$$[T - 2I]_S^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Så $\mathbf{e}_3 = (-1, 0, 1)$ är en generaliserad egenvektor som är linjärt oberoende med $\mathbf{e}_2$. Så $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

   Vi har $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, $(T - 2I)\mathbf{e}_2 = 0$ eller $T\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2$, och $[(T - 2I)\mathbf{e}_3]_S = (-1, 1, 0) = [\mathbf{e}_2]_S$ eller $T\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$. Detta betyder att

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T\mathbf{e}_1]_B & [T\mathbf{e}_2]_B & [T\mathbf{e}_3]_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Se kurslitteraturen.