

Matematik
Göteborgs universitet
Hasse Carlsson

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Adam Andersson
0703 - 08 83 04

Tentamensskrivning
Linjär algebra II, MMG400
Torsdagen den 25 oktober, 8.30-12.30

Uppgifterna ger maximalt 4 poäng utom Uppgift 1 som kan ge 5 poäng.

1. Avgör för vart och ett av följande fyra påståenden om det är sant eller falskt. Motivera *kortfattat*. Rätt svar ger $\frac{1}{2}$ poäng, korrekt kortfattad motivering $\frac{1}{2}$ poäng.

(a) Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ är normal.

(b) Vektorn $(3, 2)$ är en generaliserad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Det finns en matris A med $A^2 = I$ och egenvärdet 0.

(d) Antag att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i ett reellt skalärproduktsrum. Om

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala.

(e) Antag att T är en normal operator på ett ändligtdimensionellt komplext skalärproduktsrum med $T = T^3$. Då måste T vara själ-
vadjungerad.

2. Låt F vara basen $\mathbf{f}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 0, 1)$ och $\mathbf{f}_3 = (1, 1, 0)$. I denna bas har den linjära avbildningen T matrisen

$$[T]_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen $[T^*]_S$ för den adjungerade operatoren till T i standard-
skalärprodukten på $\mathbb{R}^3$. S är standardbasen på $\mathbb{R}^3$.

Vänd!

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (3, 2) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. Låt $\mathbb{P}_2$ vara de reella polynomen av högst andra graden med skalärprodukten

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet $t + t^2$ på det delrum E som spänns av polynomen $1 + t$ och $1 + t^2$.

5. Lös rekursionsekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{x}_0 = (3, 2) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Låt $T : V \rightarrow V$ vara en linjär operator på ett skalärproduktsrum V . Vad menas med den adjungerade operatoren T^* till T ?

(b) Visa att om T är självadjungerad på ett reellt skalärproduktsrum och $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är egenvektorer till T med olika egenvärden så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala.