Kortfattade lösningar
Linjär algebra II, MMG400
25 oktober, 2012

1. (a) Falskt. $AA^* = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = A^*A$.

   (b) Sant. $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ så $(A-2I)(3,2) = (2,0)$ och
   $(A-2I)^2(3,2) = (A-2I)(2,0) = 0$.

   (c) Falskt. Om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, så är $A^2\mathbf{u} = A\mathbf{0} = \mathbf{0} \neq \mathbf{u} = I\mathbf{u}$.

   (d) Sant. Vi har
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle =$$
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$$
   så $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

   (e) Sant. Välj ON-bas B så att $[T]_B$ är diagonal. Diagonalelementen uppfyller $d_{ii} = d_{ii}^3$ så $d_{ii} = 0, 1$ eller -1. Speciellt är diagonalelementen reella och alltså är $[T]_B^H = [T]_B$.

2. Vi har $[I]_{SF} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En kalkyl ger $[I]_{FS} = [I]_{SF}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Detta ger
$$[T]_S = [I]_{SF}[T]_S[I]_{FS} = (\text{Räkna,räkna}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$
   Så, eftersom S är en ON-bas gäller
$$[T^*]_S = [T_S]^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

3. Matrisen A har egenvärdena -1 och 4 med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (1,1)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (2,1)$.
   Vi ansätter $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2$. Då gäller
$$\mathbf{x}'(t) = a'(t)\mathbf{e}_1 + b'(t)\mathbf{e}_2$$
$$A\mathbf{x}(t) = -a(t)\mathbf{e}_1 + 4b(t)\mathbf{e}_2 \ ,$$

så $\mathbf{x}$ är en lösning om $a' = -a$ och $b' = 4b$.

Eftersom $\mathbf{x}(0) = (3,2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ ger begynnelsevilkoret att $a(0) = b(0) = 1$. Så det gäller att lösa

$$\begin{cases} a'(t) = -a(t) \\ a(0) = 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} b'(t) = 4b(t) \\ b(0) = 1 \end{cases} .$$

Lösningarna är $a(t) = e^{-t}$ och $b(t) = e^{4t}$. Så $\mathbf{x}(t) = e^{-t}(1,1) + e^{4t}(2,1)$ eller

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t} + 2e^{4t} \\ x_2(t) = e^{-t} + e^{4t} \end{cases} .$$

4. Låt projektionen vara Π, $p_1 = 1 + t$ och $p_2 = 1 + t^2$. Nu är $t + t^2 = p_1 + p_2 - 2$ och $\Pi(t + t^2) = \Pi(p_1) + \Pi(p_2) - 2\Pi 1 = p_1 + p_2 - 2\Pi 1 = 2 + t + t^2 - 2\Pi 1$. Så det gäller att beräkna $\Pi 1$.

   För att få en ortogonalbas låter vi $\mathbf{e}_1 = p_1$ och $\mathbf{e}_2 = p_2 - a\mathbf{e}_1$ där a väljs så att $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$, dvs. $\langle p_2, \mathbf{e}_1 \rangle = a\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle$. Men $\langle p_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 5$ och $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 5$ och vi får $a = 1$. Så $\mathbf{e}_2 = 1 + t^2 - (1 + t) = t^2 - t$.

   Nu är $1 = \Pi 1 + \mathbf{v}_\perp = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \mathbf{v}_\perp$, där α och β väljs så att $\mathbf{v}_\perp \perp E$. Skalärmultiplikation med $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ ger

$$\begin{aligned} \langle 1, \mathbf{e}_1 \rangle &= \alpha\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \text{ och} \\ \langle 1, \mathbf{e}_2 \rangle &= \beta\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle . \end{aligned}$$

   Men nu är $\langle 1, \mathbf{e}_1 \rangle = 3$, $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 5$, $\langle 1, \mathbf{e}_2 \rangle = 2$ och $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 4$. Detta ger $\alpha = \frac{3}{5}$, $\beta = \frac{1}{2}$ och $\Pi 1 = \frac{3}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 = \frac{1}{10}(6 + t + 5t^2)$. Till sist får vi $\Pi(t + t^2) = 2 + t + t^2 - \frac{1}{5}(6 + t + 5t^2) = \frac{4}{5}(1 + t)$.

5. Lösningen är $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$. För att beräkna $A^n\mathbf{x}_0$ observerar vi att

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda - 3)^2$$

   så $\lambda = 3$ är ett dubbellt egenvärde. Låt $N = A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ och observera att $N^2 = 0$. Binomialsatsen ger

$$A^n = (3I + N)^n = 3^n I + n3^{n-1}N .$$

   Nu är $N\mathbf{x}_0 = (-1,-1)$ och vi får

$$\mathbf{x}_n = 3^n(3,2) + n3^{n-1}(-1,-1) = 3^{n-1}(9 - n, 6 - n) .$$

6. Se kurslitteraturen.