

Matematik
Göteborgs universitet
Hasse Carlsson

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Hasse Carlsson
0703 - 08 83 04

Tentamensskrivning
Linjär algebra II, MMG400
Måndagen den 13 januari 2014, 14.00-18.00

Uppgifterna ger maximalt 4 poäng utom Uppgift 1 som kan ge 5 poäng.

1. Avgör för vart och ett av följande fem påståenden om det är sant eller falskt. Motivera *kortfattat*. Rätt svar ger $\frac{1}{2}$ poäng, korrekt kortfattad motivering $\frac{1}{2}$ poäng.

- (a) En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ måste vara surjektiv.
- (b) Om vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är linjärt beroende så är $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ det också.
- (c) Vektorn $(2, 1, 1)$ är en generaliserad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (d) Låt T vara en linjär operator på ett reellt skalärproduktsrum. Då har T och T^* samma egenvektorer.
 - (e) Låt T vara en normal operator på ett komplext skalärproduktsrum. Då har T och T^* samma egenvektorer.
2. Låt $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den avbildning som i standardbasen S har matrisen

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestäm dess matris $[T]_B$ i basen $B : [\mathbf{e}_1]_S = (1, 1), [\mathbf{e}_2]_S = (2, 3)$.
- (b) Bestäm $[T^{25}]_S$.

Vänd!

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (3, 1), \mathbf{x}'(0) = (1, 3) \end{cases} \quad \text{där } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Låt $\mathbb{P}$ vara skalärproduktsrummet av alla reella polynom p med $p(0) = p(1) = 0$ och

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Vad är den adjungerade operatorn till T där $Tp(t) = p(t) + tp'(t)$?

5. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (1, 1) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Låt $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ vara vektorer i ett vektorrum V . Vad menas med att $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ är linjärt oberoende?

(b) Låt T vara en linjär operator på ett vektorrum V och $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ tre nollskilda vektorer i V . Antag att $T\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$, $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ och $T\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2$. Visa att $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ är linjärt oberoende.