Kortfattade lösningar
Linjär algebra II, MMG400
13 januari, 2014

1. (a) Falskt. Motexempel: $T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{x}$.
   (b) Falskt. Motexempel: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ i $\mathbb{R}^2$.
   (c) Sant. A bara det tredubbla egenvärdet 2. Så $\mathbb{R}^3 = GE_2$ och varje egenvektor är en generaliserad egenvektor till A.
   Vi kan också se det genom en kalkyl. Om $\mathbf{x} = (2, 1, 1)$ så gäller $(T - 2I)\mathbf{x} = (2, 2, 0)$ och $(T - 2I)^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
   (d) Falskt. Motexempel. Låt $[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i standardbasen S på $\mathbb{R}^2$. Då är $[T^*]_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vi ser att om $[\mathbf{e}]_S = (1, 0)$ så är $T\mathbf{e} = \mathbf{0}$ och $[T^*\mathbf{e}]_S = (0, 1)$. Så $\mathbf{e}$ är en egenvektor till T (med egenvärdet 0), men *inte* till T^*.
   (e) Sant. Eftersom T är normal finns en ON-bas B där $[T]_B]$ är diagonal med egenvärdena $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ på diagonalen. $[T^*]_B$ är också diagonal med diagonalen $(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n)$. Om $\mathbf{e}_i$ är en egenvektor med egenvärde λ_i, dvs. $T\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$, så gäller $[T^*\mathbf{e}_i]_B = \bar{\lambda}_i[\mathbf{e}_i]_B$. Alltså är $\mathbf{e}_i$ en egenvektor till T^* med egenvärdet $\bar{\lambda}_i$.
   Så varje egenvektor till T är en egenvektor till T^*. Att varje egenvektor till T^* är en egenvektor till T följer på samma sätt.

2. (a) Vi har $[T]_B = [I]_{BS}[T]_s[I]_{SB}$ där $[I]_{SB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $[I]_{BS} = [I]_{SB}^{-1}$. En kalkyl ger $[I]_{BS} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ och

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Vi har $[T^2]_B = [I]_B$ så $T^2 = I$. Detta ger $T^{25} = T^{2\cdot 12+1} = T$. Alltså är $[T^{25}]_S = [T]_S = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Låt $B = 2A$. A och B har samma egenvektorer och egenvärdena till A är hälften av egenvärdena till B. Det karakteristiska polynomet till B är

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 5 \\ 5 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 + \lambda)^2 - 5^2$$

med nollställen 2 och -8. En kalkyl ger egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (1, 1)$ och $\mathbf{e}_2 = (1, -1)$. Alltså har A egenvärdet 1 med egenvektor $\mathbf{e}_1 = (1, 1)$ och egenvärdet -4 med egenvektor $\mathbf{e}_2 = (1, -1)$.

Vi ansätter $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2$. Då gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(t) &= a''(t)\mathbf{e}_1 + b''(t)\mathbf{e}_2, \\ A\mathbf{x}(t) &= a(t)\mathbf{e}_1 - 4b(t)\mathbf{e}_2 \ , \end{aligned}$$

så $\mathbf{x}$ är en lösning om $a'' = a$ och $b'' = -4b$.

Eftersom $\mathbf{x}(0) = (3, 1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{x}'(0) = (1, 3) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{x}'(t) = a'(t)\mathbf{e}_1 + b'(t)\mathbf{e}_2$ ger begynnelsevilkoren att $a(0) = 2, b(0) = 1$ och $a'(0) = 2, b'(0) = -1$. Så det gäller att lösa

$$I. \ \left\{ \begin{array}{l} a''(t) = a(t) \\ a(0) = a'(0) = 2 \end{array} \right. \quad \text{och } II. \ \left\{ \begin{array}{l} b''(t) = -4b(t) \\ b(0) = 1, b'(0) = -1 \end{array} \right. \quad .$$

I. Vi får $a(t) = Ae^t + Bb^{-t}$, $a'(t) = A + Be^t - Bb^{-t}$. Begynnelsevillkoren ger $A + B = a(0) = 2$ och $A - B = a'(0) = 2$ med lösningen $A = 2$, $B = 0$. Så $a(t) = 2e^t$.

II. Nu får vi $b(t) = C\cos 2t + D\sin 2t$, $b'(t) = -2C\sin 2t + 2D\cos 2t$. Begynnelsevillkoren ger $C = b(0) = 1$ och $2D = b'(0) = -1$ Så $b(t) = \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$.

Så lösningen är $\mathbf{x}(t) = 2e^t(1, 1) + (\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t)(1, -1)$ eller

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = 2e^t + \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t \\ x_2(t) = 2e^t - \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t \end{array} \right. \quad .$$

4. Vi observerar att $T = I + tD$ där D är deriveringsoperatorn $Df(t) = f'(t)$. Så $T^* = I + (tD)^* = I + (tD)^*$. För att beräkna $(tD)^*$ observerar vi att partiell integration ger

$$\begin{aligned} \langle tDp, q \rangle &= \int_0^1 tp'(t)q(t)dt = \int_0^1 p'(t)(tq(t))dt \\ &= [p(t)tq(t)]_0^1 - \int_0^1 p(t)(tq(t))'dt \\ &= 0 - \int_0^1 p(t)(q(t) + tq'(t))dt \\ &= -\langle p, (I + tD)q \rangle \ . \end{aligned}$$

Så $(tD)^* = -(I + tD)$ och vi får $T^* = I + (tD)^* = I - (I + tD) = -tD$ eller $T^*p(t) = -tp'(t)$.

5. En kalkyl visar att A har det dubbla egenvärdet 2. Vi sätter $N = A-2I$ och observerar att $N^2 = O$.

   Ekvationen har lösningen $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0)$. För att beräkna detta observerar vi att

$$e^{tA} = e^{t(2I+N)} = e^{2t}e^{tN} = e^{2t}(I + tN) = \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}$$

   och

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

   Så $x_1(t) = x_2(t) = e^{2t}$.

6. (a) Se kurslitteraturen.

   (b) Antag att

$$\lambda_0\mathbf{e}_0 + \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} . \tag{1}$$

   Vi skall visa att $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Genom att applicera T och T^2 på (1) får vi

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + 2\lambda_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \text{ och} \tag{2}$$

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + 4\lambda_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} . \tag{3}$$

   (3)-(2) ger $2\lambda_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ och eftersom $\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}$ får vi $\lambda_2 = \mathbf{0}$. Nu ger (2) $\lambda_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ och $\lambda_1 = 0$. Till sist ger $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ i (1) att $\lambda_0\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$ och $\lambda_0 = 0$.