Matematik
Göteborgs universitet
Hasse Carlsson

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Christoffer Standar
0703 - 08 83 04

Tentamensskrivning
Linjär algebra II, MMG400

Torsdagen den 21 augusti 2014, 8.30-12.30

Uppgifterna ger maximalt 4 poäng utom Uppgift 1 som kan ge 5 poäng.

1. Avgör för vart och ett av följande fem påståenden om det är sant eller falskt. Motivera *kortfattat*. Rätt svar ger $\frac{1}{2}$ poäng, korrekt kortfattad motivering $\frac{1}{2}$ poäng.

   (a) Om vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är linjärt oberoende så är $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ det också.

   (b) Det finns en surjektiv linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

   (c)
   $$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$
   är en skalärprodukt på $\mathbb{P}_2$, rummet av reella polynom av grad högst två.

   (d) Vektorn $(0, 1, 1)$ är en generaliserad egenvektor till matrisen
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (e) Det finns en normal operator T på ett komplext skalärproduktsrum sådan att $T^2 \neq T$ men $T^9 = T^8$.

2. Lös rekursionsekvationen
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - \frac{1}{2}y_n, \\ y_{n+1} = 3x_n - \frac{1}{2}y_n, n = 0, 1, 2, \ldots \\ x_0 = 0, y_0 = 1 \end{cases}.$$

Vänd!

3. Den linjära avbildningen T på $\mathbb{C}^2$ har matrisen

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i standardbasen på $\mathbb{C}^2$.

(a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till T.

(b) Vad är matrisen för T^{100} i standardbasen på $\mathbb{C}^2$?

4. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (1, -1), \mathbf{x}'(0) = (-1, 1) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} -16 & -10 \\ 30 & 19 \end{pmatrix}.$$

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beräkna e^A.

6. Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikhet.

(Om du väljer att använda Pythagoras sats och/eller resultat om ortogonal projektion behöver du *inte* bevisa dem.)