Kortfattade lösningar
Linjär algebra II, MMG400
24 augusti, 2014

1. (a) Sant.

   Om $c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = 0$ så gäller $c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 = 0$ med $c_3 = 0$. Men när $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är linjärt oberoende följer $c_1 = c_2 (= c_3) = 0$.

   (b) Falskt.

   Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbf{f}_1 = T\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 = T\mathbf{e}_2$. Då är $\operatorname{Ran} T = \operatorname{Span}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. Så $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ spänner $\operatorname{Ran} T$ och alltså är $\operatorname{Ran} T$ högst tvådimensionellt och kan inte vara det tredimensionella $\mathbb{R}^3$.

   (c) Sant.

   Symmetri, linjäriteten och positiviteten är klar. Dessutom, om $\langle p, p\rangle = p^2(-1) + p^2(0) + p^2(1) = 0$ så gäller $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Men ett om ett andragradspolynom är 0 i tre olika punkter så är det identiskt noll. Så $p = 0$.

   (d) Falskt.

   A har egenvärdena 1 och 2.

   En kalkyl visar att $(A - I)u = (2, 2, 0) \neq \mathbf{0}$ så u är inte en (generaliserad) egenvektor till egenvärdet 1.

   Vi har också $(A - 2I)^2 u = (0, -1, 1) \neq \mathbf{0}$ så u är inte heller en generaliserad egenvektor till egenvärdet 2.

   (e) Falskt.

   Eftersom T är normal finns en ON-bas B där $[T]_B$ är diagonal. Om diagonalelement är $d_i, i = 1, \dots, n$ så ger villkoret $T^9 = T^8$ att $d_i^9 = d_i^8$ eller $d_i^8(d_i - 1) = 0$. Så $d_i = 0$ eller $d_i = 1$. I båda fallen följer att $d_i^2 = d_i$ och $T^2 = T$.

2. På matrisform har vi $\mathbf{x}_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = A\mathbf{x}_n = 2B\mathbf{x}_n$, där $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

   Egenvärdena till A är hälften av egenvärdena till B men egenvektorerna är de samma. Vi har

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) .$$

   Så egenvärdena till A är $\dfrac{1}{2}$ och 1.

Eftersom

$$B - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$B - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

är $\mathbf{e}_1 = (1,3)$ och $\mathbf{e}_2 = (1,2)$ egenvektorer till A.

Skriv nu $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n) = a_n\mathbf{e}_1 + b_n\mathbf{e}_2$. Vi får

$$a_{n+1}\mathbf{e}_1 + b_{n+1}\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n = \frac{1}{2}a_n\mathbf{e}_1 + b_n\mathbf{e}_2 \ .$$

Dessutom är $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Detta ger

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \\ a_0 = 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} b_{n+1} = b_n \\ b_0 = -1 \end{cases} \ ,$$

med lösningarna $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ och $b_n = -1$. Så

$$\mathbf{x}_n = \frac{1}{2^n}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = (\frac{1}{2^n} - 1, \frac{3}{2^n} - 2) \ .$$

3. (a) Vi har

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 \ .$$

$p(\lambda) = 0$ ger $\lambda - 1 = \pm i$ och $\lambda = 1 \pm i$. Nu är

$$T - (\lambda + i)I = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Så $\mathbf{e}_1 = (1, -i)$ är en egenvektor med egenvärdet $1+i$. Eftersom A är reell fås den andra egenvektorn med konjugering. Så $\mathbf{e}_1 = (1, i)$ är en egenvektor med egenvärdet $1 - i$.

(b) I basen $B : \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ gäller $[T]_B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$. Nu är $(1+i)^2 = 2i$ och $(1-i)^2 = -2i$ så $[T^2]_B = [T]_B^2 = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = -2iI$. Detta ger $[T^{100}]_B = [T^2]_B^{50} = (-2i[I]_B)^{50} = -2^{50}[I]_B$. Så $T^{100} = -2^{50}I$ och $[T^{100}]_B = -2^{50}I$.

4. En kalkyl ger att matrisen A har egenvärdena -1 och 4 med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (2, -3)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (1, -2)$.

   Vi ansätter $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2$. Då gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(t) &= a''(t)\mathbf{e}_1 + b''(t)\mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{x}(t) &= -a(t)\mathbf{e}_1 + 4b(t)\mathbf{e}_2 \ , \end{aligned}$$

   så $\mathbf{x}$ är en lösning om $a'' = -a$ och $b'' = 4b$.

   Eftersom $\mathbf{x}(0) = (1, -1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{x}'(0) = (-1, 1) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{x}'(t) = a'(t)\mathbf{e}_1 + b'(t)\mathbf{e}_2$, ger begynnelsevilkoren att $a(0) = 1, b(0) = -1$ och $a'(0) = -1, b'(0) = 1$. Så det gäller att lösa

$$I. \begin{cases} a''(t) = -a(t) \\ a(0) = 1, a'(0) = -1 \end{cases} \text{och } II. \begin{cases} b''(t) = 4b(t) \\ b(0) = -1, b'(0) = 1 \end{cases} .$$

   I. Vi får $a(t) = A\cos t + B\sin t$, $a'(t) = -A\sin t + B\cos t$. Begynnelsevillkoren ger $A = a(0) = 1$ och $B = a'(0) = -1$. Så $a(t) = \cos t - \sin t$.

   II. Nu får vi $b(t) = Ce^{2t} + De^{-2t}$, $b'(t) = 2Ce^{2t} - 2De^{-2t}$. Begynnelsevillkoren ger $C + D = b(0) = -1$ och $2C - 2D = b'(0) = -1$ med lösningen $C = -\dfrac{3}{4}$, $D = -\dfrac{1}{4}$. Så Så $b(t) = -\dfrac{1}{4}\Big(3e^{2t} + e^{-2t}\Big)$.

   Så lösningen är $\mathbf{x}(t) = (\cos t - \sin t)\mathbf{e}_1 - \dfrac{1}{4}\Big(3e^{2t} + e^{-2t}\Big)\mathbf{e}_2$ eller

$$\begin{cases} x_1(t) = \quad 2(\cos t - \sin t) - \frac{1}{4}\Big(3e^{2t} + e^{-2t}\Big) \\ x_2(t) = -3(\cos t - \sin t) + \frac{1}{2}\Big(3e^{2t} + e^{-2t}\Big) \end{cases} .$$

5. Låt

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{B}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{ där } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

   Blockmatrisräkning ger

$$e^A = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{e^B}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^2 \end{array}\right) .$$

Så det återstår att beräkna e^B. B har det dubbla egenvärdet 1. B är inte diagonaliserbar men om vi skriver $B = I + N$ där $N = B - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ så gäller $N^2 = 0$. Vi får

$$e^B = e^{I+N} = e^I e^N = e\, e^N = e(I + N) = e \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Detta ger till sist

$$e^A = e \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} .$$

6. Se kurslitteraturen.