

Matematik
Göteborgs universitet
Hasse Carlsson

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Åse Fahlander
0703 - 08 83 04

Tentamensskrivning
Linjär algebra II, MMG400
Torsdagen den 25 oktober 2013, 14.00-18.00

Uppgifterna ger maximalt 4 poäng utom Uppgift 1 som kan ge 5 poäng.

1. Avgör för vart och ett av följande fem påståenden om det är sant eller falskt. Motivera *kortfattat*. Rätt svar ger $\frac{1}{2}$ poäng, korrekt kortfattad motivering $\frac{1}{2}$ poäng.

(a) Det finns en matris A med $A^2 = I$ och egenvärdet 3.

(b)

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(1)q(1)$$

är en skalärprodukt på $\mathbb{P}_2$, rummet av reella polynom av grad högst två.

(c) Vektorn $(2, 1, 1)$ är en generaliserad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ är normal.

(e) Låt T vara en linjär operator på ett reellt skalärproduktsrum. Då har T och T^* samma egenvärden.

Vänd!

2. Låt $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den avbildning som i standardbasen har matrisen

$$[T]_S = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till T .
- (b) Visa att det finns en bas B så att $[T]_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Vad är a och b ?
- (c) Bestäm $[T^{100}]_S$.
3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (2, -3), \mathbf{x}'(0) = (1, 0) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. Låt V vara vektorrummet som spänns av funktionerna $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$ och $\sin 2t$ med skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Bestäm den adjungerade operatoren T^* till T där $Tf(t) = f'(t) + 2f(t)$.

5. Lös rekursionsekvationen

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, n = 0, 1, 2, \dots \\ a_0 = 1, a_1 = 0 \end{cases}.$$

6. (a) Vad menas med att $\mathbf{u}$ är en egenvektor till den linjära operatoren T ?
- (b) Bevisa att varje linjär operator T på ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum har en egenvektor.