Kortfattade lösningar
Linjär algebra II, MMG400
25 oktober, 2013

1. (a) Falskt.

   Om $A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, så gäller $A^2\mathbf{u} = 3^2\mathbf{u}$. Detta motsäger att $A^2\mathbf{u} = I\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

   (b) Falskt.

   Om $p(t) = t^2 - 1$ så är $\langle p, p\rangle = p^2(-1) + p(1)^2 = 0$.

   (c) Sant.

   Vi har $B = A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Så $B(2,1,1) = (0,2,0)$ och $B^2(2,1,1) = \mathbf{0}$ så $\mathbf{u} \in GE_2$.

   (d) Falskt.

   Vi har $NN^* = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = N^*N$.

   (e) Sant.

   Eftersom $(T - \lambda I)^* = T^* - \lambda I^* = T^* - \lambda I$ har T och T^* samma karakteristiska polynom.

2. (a) Låt $A = [T]_S$. Då är $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \ldots = \lambda^2 + 1$. Så egenvärdena är $\lambda = \pm i$. Egenvektorn till $\lambda = -i$ fås ur

$$A + iI = \begin{pmatrix} i-3 & -2 \\ 5 & i+3 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} i-3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Så $\mathbf{e}_1 = (2, i-3)$ är en egenvektor till egenvärdet $\lambda = -i$. Genom att konjugera ser vi att $(2, -i-3)$ är en egenvektor till egenvärdet $\lambda = i$.

   (b) Låt B vara basen $\mathbf{f}_1 = \operatorname{Re}\mathbf{e}_1 = (2, -3)$, $\mathbf{f}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{e}_1 = (0, 1)$. Då är $A\mathbf{f}_1 = (0,1) = \mathbf{f}_2$ och $A\mathbf{f}_2 = (-2, 3) = \mathbf{f}_1$. Så $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Eftersom egenvärdena är $\pm i$ är T diagonaliserbar och $T^2 = -I$. (Detta kan man också se genom att beräkna A^2 eller $[T]_B^2$.) Så $T^4 = I$ och $T^{100} = (T^4)^{25} = I^{25} = I$ (och alltså $[T^{100}]_S = I$).

3. Matrisen A har egenvärdena -1 och -4 med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (1,-1)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (1,-2)$. Vi ansätter $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2$. Då gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(t) &= a''(t)\mathbf{e}_1 + b''(t)\mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{x}(t) &= -a(t)\mathbf{e}_1 + 4b(t)\mathbf{e}_2 \ , \end{aligned}$$

så $\mathbf{x}$ är en lösning om $a'' = -a$ och $b'' = -4b$.

Eftersom $\mathbf{x}(0) = (2,-3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{x}'(0) = (1,0) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{x}'(t) = a'(t)\mathbf{e}_1 + b'(t)\mathbf{e}_2$ ger begynnelsevilkoren att $a(0) = b(0) = 1$ och $a'(0) = 2, b'(0) = -1$. Så det gäller att lösa

$$I. \ \begin{cases} a''(t) = -a(t) \\ a(0) = 1, a'(0) = 2 \end{cases} \text{och } II. \ \begin{cases} b''(t) = -4b(t) \\ b(0) = 1, b'(0) = -1 \end{cases} .$$

I. Vi får $a(t) = A\cos t + B\sin t$, $a'(t) = -A\sin t + B\cos t$. Begynnelsevillkoren ger $A = a(0) = 1$ och $B = a'(0) = 2$. Så $a(t) = \cos t + 2\sin t$.

II. Nu får vi $b(t) = C\cos 2t + D\sin 2t$, $b'(t) = -2C\sin 2t + 2D\cos 2t$. Begynnelsevillkoren ger $C = b(0) = 1$ och $2D = b'(0) = -1$ Så $b(t) = \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$.

Så lösningen är $\mathbf{x}(t) = (\cos t + 2\sin t)(1,-1) + (\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t)(1,-2)$ eller

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos t + 2\sin t + \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t \\ x_2(t) = -\cos t + \sin t - 2\cos 2t + \sin 2t \end{cases} .$$

4. Vi observerar att $T = D + 2I$ där D är deriveringsoperatorn $Df(t) = f'(t)$. Så $T^* = D^* + 2I^* = D^* + 2I$ så det gäller att beräkna D^*. Eftersom alla funktioner i $\mathrm{Span}(\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t)$ är 2π-periodiska ger partiell integration att

$$\begin{aligned} \langle Df, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)g(t)dt &= \frac{1}{\pi}[f(t)g(t)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g'(t)dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g'(t)dt = \langle f, -Dg\rangle \ . \end{aligned}$$

Så $D^* = -D$ och vi får $T^* = -D + 2I$ eller $T^*f(t) = -f'(t) + 2f(t)$.

Alternativt kan man beräkna D^* genom att observera att $B : \mathbf{a}_1 = \cos t, \mathbf{b}_1 = \sin t, \mathbf{a}_2 = \cos 2t, \mathbf{b}_2 = \sin 2t$ är en ON-bas och att $D\mathbf{a}_1 = -\mathbf{b}_1$, $D\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$, $D\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{b}_1$, $D\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_1$. Så

$$[D]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger $[D^*]_B = [D]_B^T = -[D]_B$ och alltså $D^* = -D$.

5. Låt $\mathbf{x}_n = (a_n, a_{n+1})$. Då är $\mathbf{x}_{n+1} = (a_{n+1}, a_{n+2}) = (a_{n+1}, 4a_{n+1} - 4a_n)$ och $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$. På matrisform får vi

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n, n = 0, 1, \ldots \\ \mathbf{x}_0 = (1, 0) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} .$$

A har det dubbla egenvärdet 2. Skriv $A = 2I + (A - 2I) = A + N$ där $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. Vi observerar att $N^2 = 0$ och binomialsatsen ger

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= A^n\mathbf{x}_0 = (2I + N)^n\mathbf{x}_0 = (2^n I + n2^{n-1}N)\mathbf{x}_0 \\ &= 2^n(1, 0) + n2^{n-1}(-2, -4) = 2^n(1 - n, -2n) . \end{aligned}$$

Detta ger slutligen $a_n = (1 - n)2^n$.

6. Se kurslitteraturen.