

Tentamensskrivning
Linjär algebra II, MMG400
Torsdagen den 20 augusti 2015, 8.30-12.30

Uppgifterna ger maximalt 4 poäng utom Uppgift 1 som kan ge 5 poäng.

1. Avgör för vart och ett av följande fem påståenden om det är sant eller falskt. Motivera *kortfattat*. Rätt svar ger $\frac{1}{2}$ poäng, korrekt kortfattad motivering $\frac{1}{2}$ poäng.

(a) Låt

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + 2p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

på $\mathbb{P}_2$, de reella polynomen av högst andra graden. Då är $\langle p, q \rangle$ en skalärprodukt på $\mathbb{P}_2$.

(b) Vektorn $(0, 1, 0)$ är en generaliserad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Det finns en nilpotent operator med egenvärdet 2.

(d) Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som i standardskalärprodukten på $\mathbb{R}^2$ har matrisen

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

är normal.

(e) En normal operator på ett reellt skalärproduktsrum är självadjungerad.

2. Låt $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ vara den avbildning som i standardbasen på $\mathbb{C}^2$ har matrisen $[T]_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestäm en bas av egenvektorer för A .

Vänd!

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (5, -3), \\ \mathbf{x}'(0) = (1, -1) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. Låt $\mathbb{P}_2$ vara de reella polynomen av högst andra graden med skalärprodukten $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$.

- (a) Visa att polynomen $1, t$ och $3t^2 - 1$ är en bas av ortogonala vektorer i detta rum.
- (b) Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet $1 + t^2$ på det delrum E i $\mathbb{P}_2$ som spänns av $1 + t$ och $3t^2 - 1$.

5. Lös rekursionsekvationen

$$\begin{cases} a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n, n = 0, 1, 2, \dots \\ a_0 = 1, a_1 = 0 \end{cases}.$$

6. Låt $T : V \rightarrow V$ vara en linjär operator på ett komplext skalärproduktsrum. Visa att det finns en ortonormerad bas B på V sådan att $[T]_B$ är övre triangulär.