Kortfattade lösningar
Linjär algebra II, MMG400
20 augusti, 2015

1. (a) Sant.
   Det är lätt att se att $\langle x, y\rangle$ uppfyller skalärproduktsaxiomen.
   (b) Sant.
   $(A-I)^2(0,1,0) = \mathbf{0}$.
   (c) Falskt.
   Om $T\mathbf{u} = 2\mathbf{u}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, så gäller så gäller $T^n\mathbf{u} = 2^n\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.
   (d) Sant.
   $[T]_S[T]_S^* = [T]_S^*[T]_S = I$.
   (e) Falskt.
   Ett motexempel ges av avbildningen i (d), $[T^*]_S = -[T]_S$.

2. (a) Vi har $p_T(\lambda) = (\lambda-1)^2+1$. Så egenvärdena är $1 \pm i$. Egenvektorn till $\lambda = 1+i$ fås ur $[T-(1+i)I]_S = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Så $\mathbf{e}_1 = (1, i)$ är en egenvektor till egenvärdet $1+i$.

   Eftersom $[T]_S$ är reell är $\mathbf{e}_2 = \overline{\mathbf{e}}_1 = \overline{(1,i)} = (1,-i)$ är en egenvektor till egenvärdet $1-i$.

   Så $\mathbf{e}_1 = (1, i)$, $\mathbf{e}_2 = (1, -i)$ är en bas av egenvektorer.

3. Vi har $p_A\lambda = \lambda^2 - 3\lambda - 4$. Så egenvärdena är $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = -1$. Motsvarande egenvektorer är $\mathbf{e}_1 = (2,-1)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (1,-1)$.

   Vi ansätter $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2$. Då gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= a'(t)\mathbf{e}_1 + b'(t)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}''(t) &= a''(t)\mathbf{e}_1 + b''(t)\mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{x}(t) &= 4a(t)\mathbf{e}_1 - b(t)\mathbf{e}_2\ , \end{aligned}$$

   så $\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}$ ger $a'' = 4a$ och $b'' = -b$.

   Eftersom $\mathbf{x}(0) = (5,-3) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{x}'(0) = (1,-1) = \mathbf{e}_2$ ger begynnelsevilkoren att $a(0) = 2$, $b(0) = 1$, och $a'(0) = 0$ och $b'(0) = 1$.

   Så det gäller att lösa

$$I.\ \begin{cases} a''(t) = 4a(t) \\ a(0) = 2, a'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{och } II.\ \begin{cases} b''(t) = -b(t) \\ b(0) = 1, b'(0) = 1 \end{cases} .$$

I. Vi får $a(t) = Ae^{2t}+Be^{-2t}$, $a'(t) = 2Ae^{2t}-2Be^{-2t}$ Begynnelsevillkoren ger $A + B = a(0) = 2$ och $2A - 2B = a'(0) = 0$. Så $A = B = 1$ och $a(t) = e^{2t} + e^{-2t}$.

II. Nu får vi $b(t) = C\cos t+D\sin t$, $b'(t) = -C\sin t+D\cos t$, Begynnelsevillkoren ger $C = b(0) = 1$ och $D = b'(0) = -1$. Så $b(t) = \cos t-\sin t$.

Så lösningen blir $\mathbf{x}(t) = (e^{2t} + e^{-2t})(2, -1) + (\cos t - \sin t)(1, -1)$ eller

$$\begin{cases} x_1(t) = 2e^{2t} + 2e^{-2t} + \cos t - \sin t \\ x_2(t) = -e^{2t} - e^{-2t} - \cos t + \sin t \end{cases} .$$

4. (a)

Att $\langle 1, t\rangle = 0$ och $\langle 1, 3t^2 - 1\rangle = 0$ följer av gradskäl; $\int_{-1}^{1} t^k dt = 0$ om k är udda. Dessutom gäller

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot (3t^2 - 1)dt = 2\int_{0}^{1} 3t^2 - 1\, dt = 2[t^3 - t]_0^1 = 0 .$$

Så vektorerna är ortogonala och därmed linjärt oberoende. Vi vet att $\dim \mathbb{P}_2 = 3$. ($1, t, t^2$ är en bas.) Alltså är 1, t och $3t^2 - 1$ tre linjärt oberoende vektorer i ett tredimensionellt rum och därmed en bas.

(b)

Låt $P(t) = 1 + t^2$, $\mathbf{e}_1 = 1 + t$, $\mathbf{e}_2 = 3t^2 - 1$ och $\Pi P(t)$ den ortogonala projektionen av P på E.

Enligt (a) är$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = \langle 1, 3t^2 - 1\rangle + \langle t, 3t^2 - 1\rangle = 0 + 0 = 0$. Så $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är ortogonala. Den ortogonala projektionen ges $\Pi P(t) = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2$ där α och β bestäms så att $P = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + P_\perp$ och $P_\perp$ är ortogonal mot E. Skalärmultiplikation med $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ ger

$$\langle P, \mathbf{e}_1\rangle = \alpha\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle \text{ och } \langle P, \mathbf{e}_2\rangle = \alpha\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle .$$

En kalkyl ger $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle = 8/3$, $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle = 24/15$, $\langle P, \mathbf{e}_1\rangle = 8/3$ och $\langle P, \mathbf{e}_2\rangle = 8/15$. Så $\alpha = \frac{8}{3}/\frac{8}{3} = 1$ och $\beta = \frac{8}{15}/\frac{24}{15} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. Så den ortogonala projektionen är $\Pi P(t) = \mathbf{e}_1+\frac{1}{3}\mathbf{e}_2 = 1+t+\frac{1}{3}(3t^2-1) = t^2+t+\frac{2}{3}$.

5. Låt $\mathbf{x}_n = (a_n, a_{n+1})$. Då är

$$\mathbf{x}_{n+1} = (a_{n+1}, a_{n+2}) = (a_{n+1}, 6a_{n+1}-9a_n) = A\mathbf{x}_n \text{ där } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} .$$

Lösningen till rekursionsekvationen $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0 = (1, 0)$ är $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$. Så det gäller att beräkna $A^n\mathbf{x}_0$.

Vi har $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$, så $\lambda = 3$ är ett dubbellt egenvärde. En kalkyl visar att $\dim E_3 = 1$ och alltså kan A inte diagonaliseras. Därför skriver vi $A = 3I + (A - 3I) = 3I + N$ där $N = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$. Då gäller $N^2 = 0$. (Det kan verifieras med en kalkyl men följer också av teori.)

Nu får vi med hjälp av binomialsatsen att

$$A^n \mathbf{x}_0 = (3I+N)^n \mathbf{x}_0 = \left(\binom{n}{0})3^n I + \binom{n}{1})3^{n-1} N + \binom{n}{2} 3^{n-2} N^2 + \cdots \right)\mathbf{x}_0 =$$

$$3^{n-1}(3I+nN)\mathbf{x}_0 = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3(1-n) & n \\ -9n & 3(1-n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 1-n \\ -3n \end{pmatrix}.$$

Så, eftersom a_n är förstakoordinaten i $\mathbf{x}_n$, är lösningen $a_n = 3^n(1-n)$.

6. (a) Se kurslitteraturen.