

Matematik
Göteborgs universitet
Hasse Carlsson

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Elin Solberg
0703 - 08 83 04

Tentamensskrivning
Linjär algebra II, MMG400
Torsdagen den 30 oktober 2013, 8.30-12.30

Uppgifterna ger maximalt 4 poäng utom Uppgift 1 som kan ge 5 poäng.

1. Avgör för vart och ett av följande fem påståenden om det är sant eller falskt. Motivera *kortfattat*. Rätt svar ger $\frac{1}{2}$ poäng, korrekt kortfattad motivering $\frac{1}{2}$ poäng.

- (a) Låt

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 .$$

Då är $\langle x, y \rangle$ en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$.

- (b) En självadjungerad operator är normal.
(c) Vektorn $(1, 0, 1)$ är en generaliserad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

- (d) Antag att T är en inverterbar linjär operator på V . Om λ är ett egenvärde till T så är $\frac{1}{\lambda}$ ett egenvärde till T^{-1} .
(e) Låt T vara en linjär operator på ett reellt skalärproduktsrum. Då måste T och T^* ha samma egenvektorer.
2. Låt $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ vara den avbildning som i standardbasen på $\mathbb{C}^2$ har matrisen

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestäm en bas B av egenvektorer till T .
(b) Visa att det finns en kvadratrots till T , dvs. en linjär avbildning K med $K^2 = T$ och bestäm dess matris i basen B .

Räknehjälp(?): Vad är $(1 \pm i)^2$?

Vänd!

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (2, 0), \\ \mathbf{x}'(0) = (0, 2) \end{cases} \quad \text{där } A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Låt F vara basen $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 0, 1)$ och $\mathbf{f}_3 = (0, 1, 1)$ på $\mathbb{R}^3$. I denna bas har den linjära avbildningen T matrisen

$$[T]_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestäm $[T]_S$ där S är standardbasen på $\mathbb{R}^3$.
- (b) Bestäm matrisen $[T^*]_S$ där T^* är den adjungerade operatoren till T i standardskalärprodukten på $\mathbb{R}^3$.

Räknehjälp(?): Inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ är $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (1, 2) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Låt T vara en linjär operator på ett vektorrum V . Vad menas med att $\mathbf{u}$ är en egenvektor till T ?
- (b) Ge ett exempel på en linjär operator på ett ändligtdimensionellt reellt vektorrum som saknar egenvektor.
- (c) Bevisa att varje linjär operator T på ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum har en egenvektor.