Kortfattade lösningar
Linjär algebra II, MMG400
30 oktober, 2014

1. (a) Sant.
   Det är lätt att se att $\langle x, y\rangle$ uppfyller skalärproduktsaxiomen.

   (b) Sant.
   Om $T^* = T$ gäller $TT^* = T^2 = T^*T$.

   (c) Falskt.
   A har egenvärdena 1 (dubbellt) och 2. $(A-I)^2\mathbf{u} = (0,0,1) \neq \mathbf{0}$ så $\mathbf{u} = (1,0,1)$ är inte en generaliserad egenvektor till egenvärdet 1. Dessutom gäller $(A-2I)\mathbf{u} = (-1,0,0) \neq \mathbf{0}$ så $\mathbf{u}$ är inte heller en (generaliserad) egenvektor till egenvärdet 1.

   (d) Sant.
   Om $T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ så gäller $\mathbf{u} = T^{-1}T\mathbf{u} = \lambda T^{-1}\mathbf{u}$ eller $T^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{u}$. Observera att $\lambda \neq 0$ om T är inverterbar.

   (e) Falskt.
   Motexempel. Låt $[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. T har bara det dubbla egenvärdet 0 och egenvektorerna är multiplar av $(1,0)$.
   $[T^*]_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. T^* har också bara det dubbla egenvärdet 0 och egenvektorerna är multiplar av $(0,1)$.

2. (a) Vi har $p_T(\lambda) = \lambda^2 + 4$. Så egenvärdena är $\pm 2i$. Egenvektorn till $\lambda = 2i$ fås ur $[T-2iI]_S = \begin{pmatrix} -2i & -2i \\ -2i & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Så $\mathbf{e}_1 = (1,-1)$ är en egenvektor till egenvärdet $2i$.

   För egenvärdet $\lambda = -2i$ får vi $[T+2iI]_S = \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ -2i & 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Så $\mathbf{e}_2 = (1,1)$ är en egenvektor till egenvärdet $2i$. Alltså är $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en bas B av egenvektorer.

   (b) Enligt (a) gäller att $[T]_B = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$. Så om vi sätter $[K]_B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ gäller $[K^2]_B = \begin{pmatrix} (1+i)^2 & 0 \\ 0 & (1-i)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = [T]_B$. Så K är en kvadratrot till T.

3. Låt $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. B har egenvärdena 8 och -2 med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (1,1)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (1,-1)$. A har samma egenvektorer som B men eftersom $A = -\frac{1}{2}B$ skall egenvärdena till B multipliceras med $-\frac{1}{2}$. Alltså gäller $A\mathbf{e}_1 = -4\mathbf{e}_1$ och $A\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$.

Vi ansätter $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2$. Då gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= a'(t)\mathbf{e}_1 + b'(t)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}''(t) &= a''(t)\mathbf{e}_1 + b''(t)\mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{x}(t) &= -4a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2 \ , \end{aligned}$$

så $\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}$ ger $a'' = -4a$ och $b'' = b$.

Eftersom $\mathbf{x}(0) = (2,0) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{x}'(0) = (0,2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ger begynnelsevilkoren att $a(0) = 1$, $b(0) = 1$, och $a'(0) = 1$ och $b'(0) = -1$.

Så det gäller att lösa

$$I. \begin{cases} a''(t) = -4a(t) \\ a(0) = 1, a'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{och } II. \begin{cases} b''(t) = b(t) \\ b(0) = 1, b'(0) = -1 \end{cases} .$$

I. Vi får $a(t) = A\sin 2t + B\cos 2t$, $a'(t) = 2A\cos 2t - 2B\sin 2t$. Begynnelsevillkoren ger $B = a(0) = 1$ och $2A = a'(0) = 1$. Så $a(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \cos 2t$.

II. Nu får vi $b(t) = Ce^t + De^{-t}$, $b'(t) = Ce^t - De^{-t}$. Begynnelsevillkoren ger $C + D = b(0) = 1$ och $C - D = b'(0) = -1$. Så $C = 0, D = 1$ och alltså är $b(t) = e^{-t}$.

Så lösningen blir $\mathbf{x}(t) = (\frac{1}{2}\sin 2t + \cos 2t)(1,1) + e^{-t}(1,-1)$ eller

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \cos 2t + e^{-t} \\ x_2(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \cos 2t - e^{-t} \end{cases} .$$

4. (a) Vi har $[T]_S = [I]_{SF}[T]_S[I]_{FS}$. Nu är $[I]_{SF} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och

(enligt Räknehjälpen) $[I]_{FS} = [I]_{FS}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrismultiplikation ger $[T]_S = [I]_{SF}[T]_S[I]_{FS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Eftersom S är en ortonormerad bas är

$$[T^*]_S = [T]_S^* = [T]_S^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

5. Vi ser att A har det dubbla egenvärdet 2. Vi skriver $A = 2I + (A - 2I) = A + N$ där $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Vi observerar att $N^2 = O$.

   Lösningen ges av $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0)$. Nu gäller $e^{tA} = e^{2t}e^{tN} = e^{2t}(I + tN)$. Nu är $N\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, och vi får $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0) = e^{2t}\mathbf{x}(0)$ dvs.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \\ \mathbf{x}_2(t) = 2e^{2t} \end{cases} .$$

6. (a) Se kurslitteraturen.

   (b) T.ex. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Då är $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$. $p(\lambda)$ saknar reellt egenvärde och alltså (reell) egenvektor.

   (c) Se kurslitteraturen.