

Matematik
Göteborgs universitet
Hasse Carlsson

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa
Telefonvakt: Gustav Kettil
0703 - 08 83 04

Tentamensskrivning
Linjär algebra II, MMG400
Lördagen den 3 januari 2015, 8.30-12.30

Uppgifterna ger maximalt 4 poäng utom Uppgift 1 som kan ge 5 poäng.

1. Avgör för vart och ett av följande fem påståenden om det är sant eller falskt. Motivera *kortfattat*. Rätt svar ger $\frac{1}{2}$ poäng, korrekt kortfattad motivering $\frac{1}{2}$ poäng.

- (a) Vektorn $(1, 1, 0)$ är en generaliserad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Det finns en linjär operator T med $T^5 = -I$ (I är identitetsoperatorn) och egenvärdet 1.

- (c) Antag att $T : V \rightarrow V$ är en linjär operator på ett oändligt-dimensionellt vektorrum. Om T är surjektiv måste T vara injektiv.

- (d) En normal operator på ett reellt vektorrum är självadjungerad.

- (e) Antag att T är en självadjungerad operator på ett ändligtdimensionellt reellt vektorrum. Då gäller $\text{Ker } T = \text{Ker } T^2$.

2. Låt $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ vara den avbildning som i standardbasen på $\mathbb{C}^2$ har matrisen

$$[T]_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestäm egenvärden och en bas B av egenvektorer till T .

- (b) Bestäm matrisen till T^{100} i denna bas.

Vänd!

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}''(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = (1, 1), \\ \mathbf{x}'(0) = (0, -1) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. Lös rekursionsekvationen

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \mathbf{x}_0 = (1, -1) \end{cases} \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Låt $\mathbb{P}_2$ vara de reella polynomen av högst andra graden och E det delrum av $\mathbb{P}_2$ som ges av

$$E = \left\{ p \in \mathbb{P}_2; \int_{-1}^1 p(t) dt = 0 \right\}.$$

- (a) Bestäm en bas för E .
 - (b) Låt $\langle p, q \rangle$ vara den skalärprodukt på $\mathbb{P}_2$ som ges av $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$ och $\|p\|^2 = \langle p, p \rangle$ motsvarande norm. Bestäm det polynom i E som bäst approximerar polynomet $P(t) = 1 + t$ i denna norm.
6. (a) Vad menas med att en matris är övre triangulär?
- (b) Formulera Schurs sats.
- (c) Bevisa Schurs sats då vektorrummet har dimension 2.
- (d) Bevisa Schurs sats då vektorrummet har dimension 3.