Kortfattade lösningar
Linjär algebra II, MMG400
3 januari, 2015

1. (a) Sant.
$(A-I)^2(1,1,0)=0$.

(b) Falskt.
Om $T\mathbf{e}=\mathbf{e}$, $\mathbf{e}\neq\mathbf{0}$, får vi motsägelsen $T^5\mathbf{e}=\mathbf{e}\neq-\mathbf{e}=-I\mathbf{e}=T^5\mathbf{e}$.

(c) Falskt.
Motexempel. Bakåtskift, $B(x_1,x_2,x_3,\ldots)=(x_2,x_3,x_4,\ldots)$, på $\mathbb{R}^\infty$.
B är surjektiv ty om $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ är $B(0,x_1,x_2,x_3,\ldots)=\mathbf{x}$.
B är inte injektiv eftersom $B(0,0,0,\ldots)=(0,0,0,\ldots)=B(1,0,0,\ldots)$.

(d) Falskt.
Motexempel. $[T]_S=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Då är $T^*=-T$ så T är inte självadjungerad. Men $TT^*=-T^2=T^*T$ så T är normal.

(e) Sant.
Eftersom T är självadjungerad finns en (ortonormerad) bas $B:\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, sådan att $[T]_B$ är diagonal. Om diagonalelementen är $d_1,\ldots,d_n$ så är

$$\operatorname{Ker}T=\{\mathbf{x};d_ix_i=0 \text{ där } [\mathbf{x}]_B=(x_1,\ldots,x_n)\}$$

och

$$\operatorname{Ker}T=\{\mathbf{x};d_i^2\mathbf{x}_i=0 \text{ där } [\mathbf{x}]_B=(x_1,\ldots,x_n)\}.$$

Eftersom $d_i=0$ omm $d_i^2=0$ är dessa mängder lika.

2. (a) Låt $M=\sqrt{2}\,[T]_S=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}$. Då är egenvärdena till T $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gånger egenvärdena till M. Nu är $p_M(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&i\\i&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2+1=0$ med rötterna $\lambda=1\pm i$.

Egenvektorerna till T och M är de samma och fås ur ekvationerna $(M-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

När $\lambda=1+i$ får vi

$$M-(1+i)I=\begin{pmatrix}-i&i\\i&-i\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

så $\mathbf{e}_1 = (1,1)$ är en egenvektor.

När $\lambda = 1 - i$ får vi

$$M - (1-i)I = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så $\mathbf{e}_2 = (1,-1)$ är en egenvektor.

Svar: Egenvärdena är $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ och $B : \mathbf{e}_1 = (1,1), \mathbf{e}_2 = (1,-1)$ är en bas av egenvektorer.

(b) Vi har $[T]_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ och $[T^{100}]_B = [T]_B^{100}$.

Nu gäller $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$ och $(1 \pm i)^4 = -4$. Vi får $[T^4]_B = -I$ och $[T^{100}]_B = [T^4]_B^{25} = (-I)^{25} = -I$.

Anmärkning. Ett alternativt sätt att lösa (b) är att direkt observera att $[T]_S^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ och $[T]_S^4 = -I$.

3. En kalkyl ger att A har egenvärdena 1 och -1 med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (2,3)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (1,2)$ Så $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ och $A\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2$.

Vi ansätter $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{e}_1 + b(t)\mathbf{e}_2$. Då gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= a'(t)\mathbf{e}_1 + b'(t)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}''(t) &= a''(t)\mathbf{e}_1 + b''(t)\mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{x}(t) &= a(t)\mathbf{e}_1 - b(t)\mathbf{e}_2 \ , \end{aligned}$$

så $\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}$ ger $a'' = a$ och $b'' = -b$.

Eftersom $\mathbf{x}(0) = (1,1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{x}'(0) = (0,-1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ ger begynnelsevilkoren att $a(0) = 1$, $b(0) = -1$, och $a'(0) = 1$ och $b'(0) = -2$.

Så det gäller att lösa

$$I. \begin{cases} a''(t) = a(t) \\ a(0) = 1, a'(0) = 1 \end{cases} \text{ och } II. \begin{cases} b''(t) = -b(t) \\ b(0) = -1, b'(0) = -2 \end{cases} .$$

I. Vi får $a(t) = Ae^t + Be^{-t}$, $a'(t) = Ae^t - Be^{-t}$. Begynnelsevillkoren ger $A + B = a(0) = 1$ och $A - B = a'(0) = 1$ med lösningen $A = 1, B = 0$. Så $a(t) = e^t$.

II. Nu får vi $b(t) = C\cos t + D\sin t$, $b'(t) = -C\sin t + D\cos t$. Begynnelsevillkoren ger $C = b(0) = -1$ och $D = b'(0) = -2$. Alltså är $b(t) = -\cos t - 2\sin t$.

Så lösningen blir $\mathbf{x}(t) = e^t\mathbf{e}_1 - (\cos t + 2\sin t)\mathbf{e}_2$ eller

$$\begin{cases} x_1(t) = 2e^t - \cos t - 2\sin t \\ x_2(t) = 3e^t - 2\cos t - 4\sin t) \end{cases} .$$

4. Vi observerar att $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ så A har det dubbla egenvärdet 2. Vi sätter $N = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ och observerar att $N^2 = O$.

   Lösningen ges av $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$. För att beräkna detta skriver vi $A = 2I + A - 2I = 2I + N$. Binomialsatsen ger $A^n = (2I + A)^n = 2^nI + n2^{n-1}N + O = 2^{n-1}(2I + nN)$. Detta ger $\mathbf{x}_n = 2^{n-1}(2I + nN)\mathbf{x}_0 = 2^{n-1}((-2, 2) + n(-1, 2)) = 2^{n-1}(-(2 + n), 2(1 + n))$.

5. (a) Ett polynom $p(t) = a + bt + ct^2$ ligger i E om

$$\int_{-1}^{1} p(t)dt = 2\int_0^1 a + ct^2 dt = 2(a + \frac{1}{3}c) = 0 \ ,$$

   dvs. om $c = -3a$. Så $p(t) = a(1 - 3t^2) + bt$ och $B : \mathbf{e}_1 = t, \mathbf{e}_2 = 1 - 3t^2$ är en bas för E.

   (b) Den bästa approximationen ges av $\Pi p(t)$ där Π är den ortogonala projektionen på E. Eftersom $t = \mathbf{e}_1$ ligger i E är $\Pi t = t$. Så $\Pi(1 + t) = \Pi(1) + t$ och det gäller att beräkna $\Pi(1)$.

   Vi observerar att av gradskäl är $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$. Om vi låter $\Pi(1) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ så ger $1 - \Pi(1) \perp \mathbf{e}_1$ att

$$\langle 1, \mathbf{e}_1 \rangle = a\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + b\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = a\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle.$$

   Att $1 - \Pi(1) \perp \mathbf{e}_2$ ger

$$\langle 1, \mathbf{e}_2 \rangle = a\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + b\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = b\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle.$$

   Nu är $\langle 1, \mathbf{e}_1 \rangle = \int_{-1}^1 t dt = 0$ så $a = 0$. Dessutom gäller $\langle 1, \mathbf{e}_2 \rangle = \int_{-1}^1 1 - 3t^2 dt = 2\int_0^1 1 - 3t^2 dt = 0$ så $\Pi(1) = 0$.
   Vi får $\Pi(1 + t) = 0 + t = t$.

6. (a) Se kurslitteraturen.
   (b) Se kurslitteraturen.
   (c) T har en egenvektor, $T\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_1$, med $\|\mathbf{e}_1\| = 1$. Utvidga $\mathbf{e}_1$ till en ortonormerad bas $B : \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Eftersom B är en bas finns a, b med $T\mathbf{e}_2 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$. Detta ger att $[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, en övretriangulär matris.
   (d) Se kurslitteraturen.