Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2005-08-19

1. (a) $x^* = (x^*)^2$ så att $x^* = 0$ eller $x^* = 1$. $|g'(0)| = 0$ så här får vi konvergens, men $|g'(1)| = 2$. $x^* = 1$ är en repulsiv fixpunkt, ty $x_0 < 1$ ger konvergens mot $x^* = 0$ och $x_0 > 1$ ger divergens mot ∞.

   (b) BLAS3 kräver $\mathcal{O}(n^3)$ räkneoperationer och $\mathcal{O}(n^2)$ minnesreferenser vilket ger utrymme för återanvändning av data som hämtats till cacharna. Detta gör det möjligt att få ett snabbare program. BLAS1 har $\mathcal{O}(n)$ för både räkneoperationer och minnesreferenser vilket gör att minnesprestanda kommer att vara den begränsande faktorn.

   (c) Inte maximalt polynomiellt gradtal. Enkelt att återanvända funktionsvärden vid adaptivitet. Enkelt att implementera metoden.

   (d) Om $x \neq y$ kan det som minst skilja en bit. Räknar vi med ca 16 siffror så blir $d \leq 10^{16}$ i första fallet. I andra fallet, med godtyckliga värden, kan vi ta $y = 0$ och $x = 10^{-323}$ (som är denormaliserat). Det största talet är ungefär 10^{308} varför $1/|x - y|$ ger `Inf`.

   (e) x-värdena är $10^{-k}, k = 1, 2, \ldots, 200$. Att beräkna $\log x / \sin x$ ger inga problem som under- /overflow: $\log 10^{-k} / \sin 10^{-k} \approx (-k \log 10)/10^{-k}$ eftersom $\sin x \approx x$ för små x. `s1` torde alltså ge en bra approximation av resultatet. Det sista x-värdet är 10^{-200} och $fl(x^2) = 0$, så underflow (redan $fl((10^{-162})^2 = 0)$. `log(0) = -Inf` så att `s2 = -Inf` vilket är en dålig approximation.

   (f) Symmetrisk: $(\mathbf{QDQ}^T)^T = (\mathbf{Q}^T)^T \mathbf{D}^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{QDQ}^T$. Positivt definit: Eftersom $\mathbf{Q}$ är ickesingulär kan varje $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ skrivas $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-T}\mathbf{x}$ för något $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. $\mathbf{y}^T(\mathbf{QDQ}^T)\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n d_k x_k^2 > 0$ ty alla $d_k > 0$ och minst något $x_k \neq 0$.

   (g) $||\mathbf{Qx}||_2 = ((\mathbf{Qx})^T\mathbf{Qx})^{1/2} = (\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2} = ||\mathbf{x}||_2$.
   $||\mathbf{QA}||_2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} ||\mathbf{QAx}||_2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} ||\mathbf{Ax}||_2 = ||\mathbf{A}||_2$.

2. Låt matrisen ha elementen $a = a_{1,1}$, $b = a_{1,2} = a_{2,1}$ samt $c = a_{2,2}$. Ekvationerna blir: $a^2+2b^2+c^2-118 = 0$, $ac - b^2 + 41 = 0$ och $ab^2c - 392 = 0$ och Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a^{(k+1)} \\ b^{(k+1)} \\ c^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{(k)} \\ b^{(k)} \\ c^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a^{(k)} & 4b^{(k)} & 2c^{(k)} \\ c^{(k)} & -2b^{(k)} & a^{(k)} \\ (b^{(k)})^2 c^{(k)} & 2a^{(k)}b^{(k)}c^{(k)} & a^{(k)}(b^{(k)})^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (a^{(k)})^2 + 2(b^{(k)})^2 + (c^{(k)})^2 - 118 \\ a^{(k)}c^{(k)} - (b^{(k)})^2 + 41 \\ a^{(k)}(b^{(k)})^2 c^{(k)} - 392 \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = v$, $y_2 = u$, $y_3 = y_2' = u'$ samt $y_4 = y_3' = u''$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = t y_1 y_4 + y_3 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_2 - y_3 + y_1^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(-2) = 3 \\ y_2(-2) = 1 \\ y_3(-2) = 2 \\ y_4(-2) = 4 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} t_0 y_1^{(0)} y_4^{(0)} + y_3^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \\ y_2^{(0)} - y_3^{(0)} + (y_1^{(0)})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 - 2 + 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.2 \\ 2.4 \\ 4.8 \end{bmatrix}$$

4. (a) Nej, det är inte sant. Tag t.ex. $f(t) = \alpha(1 - t^2)$. Då är $f(-1) = f(1) = 0$ så att p är nollpolynomet och $p(0) = 0$. Eftersom $f(0) = \alpha$ så kan skillnaden bli godtyckligt stor.

   (b) Ansätt $p(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n$. Det gäller att

$$p^{(k)}(\tau) = \sum_{j=k}^{n} \frac{j!\ \tau^{j-k}}{(j-k)!}\ x_k = k!\ x_k + \ldots + \frac{n!\ \tau^{n-k}}{(n-k)!}\ x_n\ , \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

   Inför $\mathbf{x}^T = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ och analogt för y-värdena. $\mathbf{x}$ ges då som lösningen till ett linjärt ekvationssystem, $\mathbf{Tx} = \mathbf{y}$ där $\mathbf{T}$ är en övertriangulär matris med positiva diagonalelement ($k!, k = 0, 1, \ldots, n$). $\mathbf{T}$ är därmed ickesingulär varför lösningen $\mathbf{x}$, och därmed polynomet, existerar och är entydigt bestämt.

5. Resultatet är en radvektor. Låt oss lagra resultatet i $\mathbf{b}^T$.

$\mathbf{x} = \mathbf{Ab}$	n^2 +, *, $\mathbf{x}$ allokeras
$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$	n^2 +, *, $\mathbf{y}$ allokeras
$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$	n +
$\mathbf{y} = \mathbf{b}$	spara $\mathbf{b}$
beräkna **A**s LU-faktorisering, spara i **A**	$n^3/3$ +, *
lös $\mathbf{LUb} = \mathbf{b}$	n^2 +, * (vi skriver över högerledet $\mathbf{b}$ och lagr ar lösningen i $\mathbf{b}$, så $\mathbf{LUb}_{new} = \mathbf{b}_{old}$)
lös $\mathbf{LUb} = \mathbf{b}$	n^2 +, * (vi skriver över högerledet)
$\mathbf{x} = \mathbf{x} + 2\mathbf{b}$	n +, *
$\alpha = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$	n +, *
$\mathbf{b}^T = \alpha\mathbf{y}^T$	n * ($\mathbf{y}$ är den sparade $\mathbf{b}$)

   Vi behöver två extra vektorer. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*.

6. Normalekvationerna (t.ex.): $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ty $\mathbf{A}$ är en ortogonal matris. Så

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\psi - \sin\psi \\ -\sin\psi - \cos\psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} = [0, 0, 3]^T$$

   $\mathbf{a}_1^T\mathbf{r} = \mathbf{a}_2^T\mathbf{r} = 0$ så att $\mathbf{r} \perp \Re(\mathbf{A})$. Vi ser att $\mathbf{r}$ ej beror på ψ. Varför? Jo, kolonnerna i $\mathbf{A}$ utgör en ON-bas för matrisens bildrum (x-y-planet). Vinkeln ψ vrider basvektorerna men planet ändras inte. Projektionen av $\mathbf{b}$ på planet är konstant, $[1, -1, 0]^T$ och residualen, $[0, 0, 3]^T$, det som blir kvar, är därmed också konstant. $\mathbf{x}$ ändras eftersom matrisen ändras.

   Alla $\mathbf{b}$ som har $b_3 = 0$ ger $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ eftersom $\mathbf{b} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$. Om $b_3 \neq 0$ ligger inte $\mathbf{b}$ i $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ varför $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.