Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2006-08-21

1. (a) $\kappa(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{A}^{-1}||$ så att $\kappa(\mathbf{A}^{-1}) = ||\mathbf{A}^{-1}||\ ||(\mathbf{A}^{-1})^{-1}|| = ||\mathbf{A}^{-1}||\ ||\mathbf{A}|| = \kappa(\mathbf{A})$.
$\kappa(\alpha\mathbf{A}) = ||\alpha\mathbf{A}||\ ||(\alpha\mathbf{A})^{-1}|| = ||\alpha\mathbf{A}||\ ||\alpha^{-1}\mathbf{A}^{-1}|| = |\alpha|\ |\alpha^{-1}|\ ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{A}^{-1}|| = \kappa(\mathbf{A})$.

   (b) Metoden består av två metoder av ordning 4 resp. 5 (till ungefär samma beräkningskostnad som för en metod). Skillnaden mellan vad de olika metoderna ger (på $\mathbf{y}^{(k)}$) kan användas för att uppskatta det lokala felet.

   (c) `Inf NaN` ty, `tan(0)=0`, `1/0=Inf`, `exp(Inf)=Inf`. `log(0)=-Inf`, `tan(-Inf)=NaN`.

   (d) Ungefär 10^{28}. När `1e12` skiftas ut (och därmed även `1e10`) så gäller att `1e10+x == 1e12+x`. `x` är då ungefär $10^{12} \cdot 10^{16} = 10^{28}$.

   (e) En fixpunkt satisfierar $x^* = p(x^*)$ dvs. $p(x^*) - x^* = 0$. Denna polynomekvation måste ha minst en reell rot (ty polynomet $p(x) - x$ har ju reella koefficienter och udda gradtal, så eventuella komplexa rötter är ju komplex-konjugerade).

   (f) $\mathbf{A}$ positivt definit $\Leftrightarrow \alpha_k > 0, k = 1, \ldots, n$, ty om något $\alpha_j \le 0$ så gäller att $\mathbf{e}_j^T\mathbf{A}\mathbf{e}_j \le 0$ och $\mathbf{A}$ är ej positivt definit. Om alla $\alpha_k > 0$ så gäller att $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k^2 > 0$ givet att $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
Ortogonal? Vi kräver att $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ dvs. $\alpha_k^2 = 1, k = 1, \ldots, n$ så att $\alpha_k = \pm 1$.

   (g) Vi måste börja med att anta att $\alpha \neq 0$. LU-faktorisering ger:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta - 1/\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 1/\sqrt{\alpha} & \sqrt{\beta - 1/\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} & 1/\sqrt{\alpha} \\ 0 & \sqrt{\beta - 1/\alpha} \end{bmatrix}$$

   För att kunna beräkna Choleskyfaktoriseringen får vi tydligen kräva att $\alpha > 0$ och $\beta - 1/\alpha > 0$ (dvs. $\alpha\beta > 1$).

2. Vi skriver ekvationen som $1/x^2 - c = 0$. Newtons metod blir

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1/x_k^2 - c}{-2/x_k^3} = 0.5(3x_k - cx_k^3)$$

3. Inför $y_1 = v$, $y_2 = u$, $y_3 = y_2' = u'$ samt $y_4 = w$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = ty_1y_3 + y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_2 - y_3 + y_1^2 \\ y_4' = y_2 + y_1 + 2y_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = 1 \\ y_3(2) = 2 \\ y_4(2) = 4 \end{cases}$$

   Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} t_0 y_1^{(0)} y_3^{(0)} + y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_2^{(0)} - y_3^{(0)} + (y_1^{(0)})^2 \\ y_2^{(0)} + y_1^{(0)} + 2y_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \\ 2 \\ 1 - 2 + 3^2 \\ 1 + 3 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3 \\ 1.2 \\ 2.8 \\ 5.2 \end{bmatrix}$$

4. a) Vi får följande ekvationer, när $f(x) = x^k, k = 0, 1, \ldots, n$ och söker maximalt n:

$$\begin{cases} 1 + \alpha + 1 = 2 + \alpha \\ 0 + \alpha/2 + 1 = (2 + \alpha)/2 \\ 0 + \alpha/4 + 1 = (2 + \alpha)/3 \\ 0 + \alpha/8 + 1 = (2 + \alpha)/4 \\ 0 + \alpha/16 + 1 = (2 + \alpha)/5 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

De två första ekvationerna är identiteter, men den tredje ger $\alpha = 4$. Detta värde satisfierar också den fjärde ekvationen, men inte den femte, så maximalt gradtal är tre (fel för x^4-termen).

b) Interpolationspolynomet ger ofta kraftiga svängningar vid ändarna (Runges fenomen). Splineinterpolation ger ett lugnare uppförande, men funktionen är inte lika deriverbar (samt är besvärligare att representera och att evaluera).

5. Resultatet är en skalär. Låt oss lagra resultatet i α.

$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{a}$	n^2 +, *, $\mathbf{t}$ allokeras
$\alpha = \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *
$\beta = \mathbf{t}^T\mathbf{t}$	n +, *
beräkna $\mathbf{A}$s LU-faktorisering, spara i $\mathbf{A}$	$n^3/6$ +, *
lös $\mathbf{LU}\mathbf{t} = \mathbf{a}$	n^2 +, *
$\gamma = \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *
$\delta = \mathbf{t}^T\mathbf{t}$	n +, *
$\alpha = \alpha + \beta + \gamma + 2\delta$	innehåller svaret

Vi behöver en extra vektor. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/6$ +,*.

6. Eftersom matrisen är välkonditionerad kan vi använda normalekvationerna, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$. Matrisen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ blir blockdiagonal. Om t.ex. $m = 3$ får vi följande linjära ekvationssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T\mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3^T\mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T\mathbf{b} \\ \mathbf{A}_2^T\mathbf{b} \\ \mathbf{A}_3^T\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Om vi partitionerar $\mathbf{x}$ analogt (i m stycken delar, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$, alla med längd p) får vi lösa följande m system:

$$(\mathbf{A}_k^T\mathbf{A}_k)\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k^T\mathbf{b}, \; k = 1, \ldots, m$$

Vi löser system med Choleskyfaktoriseringen som vanligt. Det räcker att bilda ena triangeln av $\mathbf{A}_k^T\mathbf{A}_k$ (matrisen är ju symmetrisk).