Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2007-01-19

1. (a) Kan återanvända LU-fakt. om vi har flera högerled som inte alla är kända samtidigt (förutsatt att $\mathbf{A}$ inte ändras).

   (b) En flerstegsmetod får hög ordning genom att använda tidigare punkter (lite beräkningsarbete för hög ordning). Billigt att ta fram värden mellan olika t_k (via interpolation). Nackdel, kräver speciella åtgärder de första stegen (steget).

   (c) Den uppenbara metoden ger overflow, $200! \approx 0.8 \cdot 10^{375}$, så vi skriver

$$\frac{n!}{k!\ (n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}$$

   Följande borde gå bra:

```
n = 200;
k = 40;
n_over_k = prod(((n-k+1):n) ./ (1:k));
```

   (d) Ungefär 10^{-118}. När `1e-134` skiftas ut (och därmed även `1e-140`) så gäller att `1e-134+x == 1e-140+x`. `x` är då ungefär $10^{-134} \cdot 10^{16} = 10^{-118}$.

   (e) En fixpunkt satisfierar $x^* = x^* - 1/2 + \sin x^*$ eller $\sin x^* = 1/2$. Alltså finns oändligt många fixpunkter. Uppenbarligen finns en fixpunkt i den inre av intervallet $[0, \pi/2]$ (från geometrin eller pga kontinuitet och teckenväxling, $\sin 0 - 1/2 < 0$ och $\sin \pi/2 - 1/2 > 0$). Beloppet av derivatan i denna punkt är $|g'(x^*)| = 1 + \cos x^* > 1$ ty cosinus är positiv i $[0, \pi/2[$ och fixpunkten är repulsiv. Analogt finns en fixpunkt i $]\pi/2, \pi[$ och cosinus är där negativ varför $|g'(x^*)| < 1$ och fixpunkten är attraktiv.

   (f) $\kappa(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{A}^{-1}||$. $||\mathbf{A}||_1 = \max_j |\alpha_j|$ (maximala kolonnsumman). Eftersom $\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{diag}(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})$ så gäller att $||\mathbf{A}^{-1}||_1 = \max_j |\alpha_j^{-1}| = 1/\min_j |\alpha_j|$, vilket ger resultatet för $\kappa_1(\mathbf{A})$.
   För tvånormen gäller att $||\mathbf{A}||_2$ är roten ur största egenvärdet till $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2)$. Alltså gäller att $||\mathbf{A}||_2 = \max_j |\alpha_j|$. Analogt gäller att $||\mathbf{A}^{-1}||_2 = \max_j |\alpha_j^{-1}| = 1/\min_j |\alpha_j|$.

   (g) Sätt $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j + \sigma \mathbf{e}_k$ med $\sigma = \pm 1$ och $j \neq k$. Eftersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gäller att $0 < \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = a_{jj} + 2\sigma a_{jk} + a_{kk}$. Tag $\sigma = -\mathrm{sign}(a_{jk})$. Så $\mathrm{sign}(a_{jk}) a_{jk} = |a_{jk}| < (a_{jj} + a_{kk})/2 \leq \max(a_{jj}, a_{kk})$, vilket visar påståendet.

2. Låt x, y och z var de tre talen. Vi får:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_k & 2y_k & 2z_k \\ 3x_k^2 & 3y_k^2 & 3z_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_k + y_k + z_k - 1 \\ x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - 5 \\ x_k^3 + y_k^3 + z_k^3 - 4 \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = r_1$, $y_2 = r_2$ samt $y_3 = v$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_3 t y_1 / \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ y_2' = y_2 + y_3 t y_2 / \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ y_3' = y_1 - y_2 + t y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = 4 \\ y_3(2) = 5 \end{cases}$$

   Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_1^{(0)} + y_3^{(0)} t_0 y_1^{(0)} / \sqrt{(y_1^{(0)})^2 + (y_2^{(0)})^2} \\ y_2^{(0)} + y_3^{(0)} t_0 y_2^{(0)} / \sqrt{(y_1^{(0)})^2 + (y_2^{(0)})^2} \\ y_1^{(0)} - y_2^{(0)} + t_0 y_3^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 3 + 5 \cdot 2 \cdot 3/\sqrt{3^2 + 4^2} \\ 4 + 5 \cdot 2 \cdot 4/\sqrt{3^2 + 4^2} \\ 3 - 4 + 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9 \\ 5.2 \\ 5.9 \end{bmatrix}$$

4. a) Vi använder partiell integration (integrera $\sin^{0.9} x$) för att bli av med singulariteten:

$$\int_0^1 \frac{\cos^{0.8} x}{\sin^{0.9} x}\, dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sin^{0.9} x \ \cos^{0.2} x}\, dx = \left[\frac{\sin^{0.1} x}{0.1 \cdot \cos^{0.2} x}\right]_0^1 - 10 \int_0^1 \sin^{0.1} x \frac{-0.2 \cdot (-\sin x)}{\cos^{1.2} x}\, dx =$$

$$10\, \frac{\sin^{0.1}(1)}{\cos^{0.2}(1)} - 2 \int_0^1 \frac{\sin^{1.1} x}{\cos^{1.2} x}\, dx$$

där vi använder `quadl` på den nu snälla integralen.

b)

$$p(t) = 2\frac{(t-3)(t-5)}{(1-3)(1-5)} + (-1)\frac{(t-1)(t-5)}{(3-1)(3-5)} + 3\frac{(t-1)(t-3)}{(5-1)(5-3)}$$

5. Resultatet är en skalär, σ, som kan beräknas på flera olika sätt, här följer ett. Först en omskrivning:

$$\frac{\mathbf{a}^T(\mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{A}\mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{A}^{-2})\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} + 2\mathbf{a}^T\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-2}\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} =$$

$$2\mathbf{a}^T\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-2}\mathbf{b}, \quad \text{med} \quad \mathbf{b} = \mathbf{a}/||\mathbf{a}||_2$$

$\eta = \lVert\mathbf{a}\rVert_2$	n +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{a}$	n^2 +, *, $\mathbf{t}$ allokeras
$\sigma = 2\eta^2 + \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *
beräkna $\mathbf{A}$s LU-faktorisering, spara i $\mathbf{A}$	$n^3/3$ +, *
$\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (1/\eta)$	n *, normera
$\mathbf{t} = \mathbf{a}$	kopiera
lös $\mathbf{LU}\mathbf{t} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
$\sigma = \sigma + \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *
lös $\mathbf{LU}\mathbf{t} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
$\sigma = \sigma - \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *

Vi behöver en extra vektor. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*.

6. Logaritmera och multiplicera upp nämnaren:
$\log R = (1 + p_1T + p_2T^2)/(p_3 + p_4T)$, $(p_3 + p_4T)\log R = (1 + p_1T + p_2T^2)$. Samla alla parametrarna på en sida: $-p_1T - p_2T^2 + p_3 \log R + p_4T \log R = 1$.
Raderna i $\mathbf{A}$ innehåller $[-T_k, -T_k^2, \log R_k, T_k \log R_k]$, $k = 1, \ldots, m$. $\mathbf{b}$-vektorn består av ettor och $\mathbf{x}$-vektorn innehåller parametrarna, $\mathbf{x}^T = [p_1, p_2, p_3, p_4]$ som ges av $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2$.