Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2007-04-13

1. (a) Choleskyfaktorisering, kräver halva antalet operationer (+, *) och halva minnet jämfört med det allmänna osymmetriska fallet.

   (b) Det kan bero på att vi använder en explicit lösare och att problemet är styvt. Det skulle också kunna bero på att vi ligger nära en singularitet. Om vi använder en lösare av låg ordning och lösningen oscillerar får vi också ta korta steg. Detta var tre möjliga orsaker.

   (c) Det är väsentligen samma förklaring som för $(x-1)^6$-labben. Vi försöker bilda ett litet värde, e^{-20} genom att kombinera stora värden. Avrundningsfelen blir då stora, relativt det lilla resultatet. Studerar vi $x^k/k!$ bli de första termerna

$$\frac{-20}{1},\ \frac{20^2}{2},\ \frac{-20^3}{6},\ \frac{20^4}{24},\ \frac{-20^5}{120} \approx -32000, \text{ etc.}$$

   Man inser att värdena tillväxer så länge som $k \leq 19$. Det största värdet får vi för $k = 19$ och $k = 20$, då $|20^k/k!| \approx 4 \cdot 10^7$. Detta behöver man nu inte veta, utan det räcker att konstatera att vi kommer att få stora termer (med blandade tecken) och att dessa skall kombineras för att ge ett litet resultat.

   (d) $\pi^8/9450 \approx 10^4/9450 \approx 1$ (exakt värde ≈ 1.004). Vi noterar att summan blir ett redan i första iterationen. Sedan ökar summan inte speciellt mycket. `s==st` när $1/k^8$ skiftas ut, dvs. när $fl(s + 1/k^8) = s$ dvs. ungefär när $fl(1 + 1/k^8) = 1$. Så k ges av sambandet $1/k^8 \approx 10^{-16}$ så att $k \approx 100$. När man kör programmet får man $k = 99$.

   (e) Vi kontrollerar först att x^* är en fixpunkt. Fixpunkterna ges av $x = x + \alpha(x^3 - 2)$ så att en fixpunkt satisfierar ekvationen $x^3 = 2$. Det givna värdet är alltså en fixpunkt. Kontraktiv? Det skall gälla att $|g'(x^*)| < 1$ (där $x_{k+1} = g(x_k)$). $|g'(x^*)| = |1 + 3\alpha(x^*)^2| = |1 + 3\alpha 2^{2/3}|$. Löser man olikheten får man $-2^{1/3}/3 < \alpha < 0$.

   (f) $||\mathbf{QA}||_2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\ ||\mathbf{QAx}||_2/||\mathbf{x}||_2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\ ||\mathbf{Ax}||_2/||\mathbf{x}||_2 = ||\mathbf{A}||_2$, ty vektortvånormen är unitärt invariant. Varför? Jo, $||\mathbf{Qz}||_2^2 = (\mathbf{Qz})^T(\mathbf{Qz}) = \mathbf{z}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Qz} = \mathbf{z}^T\mathbf{z} = ||\mathbf{z}||_2^2$ och normen är ju ickenegativ.

   (g) Sätt $\mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_j + y_2\mathbf{e}_k, j \neq k$ där $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T \neq \mathbf{0}$. Eftersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gäller att

$$0 < \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = y_1^2 a_{jj} + 2y_1y_2a_{jk} + y_2^2a_{kk} = \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{A}_{jk}\mathbf{y}$$

   vilket visar att $\mathbf{A}_{jk}$ är positivt definit eftersom $\mathbf{y}$ kan väljas godtyckligt (skild från nollvektorn).

2. Vi inför vektorn $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ och skriver $f(\mathbf{x})$ i stället för $f(x_1, x_2)$. Newtons metod kan skrivas:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} f^2(\mathbf{x}^{(k)}) + \sin(f(\mathbf{x}^{(k)})) - 1 \\ 3f(\mathbf{x}^{(k)}) + (x_1^{(k)})^2 + x_2^{(k)} - 3f^3(\mathbf{x}^{(k)}) \end{bmatrix}$$

   där (f_1' och f_2' betecknat de partiella derivatorna)

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2f(\mathbf{x}^{(k)})f_1'(\mathbf{x}^{(k)}) + \cos(f(\mathbf{x}^{(k)}))f_1'(\mathbf{x}^{(k)}) & 2f(\mathbf{x}^{(k)})f_2'(\mathbf{x}^{(k)}) + \cos(f(\mathbf{x}^{(k)}))f_2'(\mathbf{x}^{(k)}) \\ 3f_1'(\mathbf{x}^{(k)}) + 2x_1^{(k)} - 9f^2(\mathbf{x}^{(k)})f_1'(\mathbf{x}^{(k)}) & 3f_2'(\mathbf{x}^{(k)}) + 1 - 9f^2(\mathbf{x}^{(k)})f_2'(\mathbf{x}^{(k)}) \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = r_1$, $y_2 = r_2$ samt $y_3 = v$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_3ty_1/(|y_1| + |y_2|) \\ y_2' = y_2 + y_3ty_2/(|y_1| + |y_2|) \\ y_3' = y_1 - y_2 + ty_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 6 \\ y_2(2) = 4 \\ y_3(2) = 5 \end{cases}$$

   Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_1^{(0)} + y_3^{(0)}t_0y_1^{(0)}/(|y_1^{(0)}| + |y_2^{(0)}|) \\ y_2^{(0)} + y_3^{(0)}t_0y_2^{(0)}/(|y_1^{(0)}| + |y_2^{(0)}|) \\ y_1^{(0)} - y_2^{(0)} + t_0y_3^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 6+5\cdot 2\cdot 6/(6+4) \\ 4+5\cdot 2\cdot 4/(6+4) \\ 6-4+2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 4.8 \\ 6.2 \end{bmatrix}$$

4. a) Vi skriver om problemet enligt:

$$\int_0^1 \frac{(1+x)\cos x}{\sin(x)^{0.8}}\,dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sin(x)^{0.8}}\,dx + \int_0^1 \frac{x\cos x}{\sin(x)^{0.8}}\,dx = \left[5\sin(x)^{0.2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x\cos x}{\sin(x)^{0.8}}\,dx =$$

$$5\sin(1)^{0.2} + \int_0^1 \frac{x\cos x}{\sin(x)^{0.8}}\,dx$$

där vi använder `quadl` på den nu snälla integralen. Varför är det snäll? Jo, integranden uppför sig som $x^{0.2}\cos x$ då $x \approx 0$ (tänk på Taylorutvecklingen av $\sin x$) så att vi inte längre har någon singularitet.

b) Detta är interpolationspolynomet i punkterna $(k, y_k), k = 1, \ldots, n$ och det är därför entydigt.
Varför? Jo, antag att det existerar ett annat polynom, q av grad $\leq n-1$, som också interpolerar i punkterna. Då gäller att $p(k) = q(k),\ k = 1, \ldots, n$. $p - q$ är ett polynom av grad $\leq n-1$ med nollställen $1, 2, \ldots, n$. Det måste alltså vara nollpolynomet och $p = q$.

5. Resultatet är en vektor, som vi lagrar i $\mathbf{a}$. Först en omskrivning:

$$(2\mathbf{a}\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{a}\mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{A}^{-2})\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a})(\mathbf{a}^T\mathbf{a}) + \mathbf{a}(2(\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a})) - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a})$$

$\eta = \mathbf{a}^T\mathbf{a}$	n +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{a}$	n^2 +, *, $\mathbf{t}$ allokeras
$\sigma = \eta \cdot (\mathbf{a}^T\mathbf{t})$	n +, *
beräkna $\mathbf{A}$s LU-faktorisering, spara i $\mathbf{A}$	$n^3/3$ +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{a}$	kopiera
lös $\mathbf{LUt} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
$\sigma = \sigma + 2(\mathbf{a}^T\mathbf{t})$	n +, *
lös $\mathbf{LUt} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
$\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a} - \mathbf{t}$	n +, *

Vi behöver en extra vektor. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*.

6. Logaritmera

$$\log y = \frac{E}{t-T} + \log a$$

Multiplicera upp $t - T$ och samla ihop termerna:

$$t \log y = T\log y + t\log a + E - T\log a$$

Låt $x_1 = T$, $x_2 = \log a$ och $x_3 = E - T\log a$.
Raderna i $\mathbf{A}$ innehåller $[\ \log y_k,\ t_k,\ 1\ ], k = 1, \ldots, m$ och $\mathbf{b} = [t_1\log y_1, \ldots, t_m \log y_m]^T$. När vi har löst problemet, $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2$, sätter vi $T = x_1$, $a = e^{x_2}$ och $E = x_3 + Tx_2$.