Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2009-08-29

1. (a) Låt talen vara x och y. $fl(x/y) = (x/y)(1+\epsilon) = \tilde{x}/\tilde{y}$, $|\epsilon| \leq \epsilon_{mach}$ där t.ex. $\tilde{x} = x(1+\epsilon)$ och $\tilde{y} = y$ så att den beräkna produkten är en exakt produkt av tal som ligger nära x och y.

   (b) `100^200=Inf`, så `log10(100^200) = Inf`. `200*log10(100) = 400`, så att `log10(100^200)-200*log10(100)=Inf`.
   `-1/0=-Inf`, `sin(-Inf)` blir NaN, så att `atan` blir NaN. Så svaret blir `Inf, NaN`.

   (c) Se föreläsningsanteckningarna.

   (d) En positivt definit matris har positiva diagonalelement, så $\alpha > 0$ är nödvändigt. Vi kan då bryta ut α eftersom det räcker att undersöka om $\mathbf{A}/\alpha$ är pos. def. (räkningarna blir då lite enklare). Choleskyfaktoriseringen (om den existerar) av $\mathbf{A}/\alpha$ blir

$$\mathbf{A}/\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1+1/\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{1/\alpha - 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{1/\alpha - 3} \end{bmatrix}$$

   För existens kräver vi tydligen att $\alpha > 0$ och $1/\alpha - 3 > 0$ dvs $0 < \alpha < 1/3$.

   (e) Eftersom $\mathbf{w}$ är ortogonal mot $\mathbf{A}$:s bildrum så påverkas inte lösningen, $\mathbf{x}$, av $\mathbf{w}$, utan $\mathbf{w}$ kommer att bli residualvektorn. Det gäller t.ex. att

$$|| \,\mathbf{Ax} - \mathbf{Ab} - \mathbf{w}\, ||_2^2 = || \,\mathbf{Ax} - \mathbf{Ab}\, ||_2^2 + || \,\mathbf{w}\, ||_2^2$$

   Så det räcker att studera $|| \,\mathbf{Ax} - \mathbf{Ab}\, ||_2$. Vi får två fall. Om $\mathbf{A}$ har full kolonnrang har problemet entydig lösning, $\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Om $\mathbf{A}$ är rangdefekt är lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{z}$, där $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ ($\mathbf{A}$:s nollrum).

   (f) Nej, tag $\mathbf{v} = [-1,\ 0, 1]$. Då är $|\text{median}(\mathbf{v})| = 0$, som bryter mot positivitetsvillkoret (normen av en nollskild vektor skall vara positiv).

   (g) Lös $x = g(x)$ med $g(x) = x^2 + x - 1/c$ vilket ger $x = \pm 1/\sqrt{c}$. Nu till konvergensen: $|g'(1/\sqrt{c})| = |2/\sqrt{c} + 1|$ som alltid är större än ett, så ingen konvergens. $|g'(-1/\sqrt{c})| = |-2/\sqrt{c} + 1|$. För vilka c är detta mindre än ett? Jo, när $-1 < -2/\sqrt{c} + 1 < 1$ dvs när $1 < c$.
   Svar: vi kan få konvergens mot $-1/\sqrt{c}$ när $1 < c$.

2. Ekvationerna blir:

$$\begin{cases} a + e^b + \sin c - 1 = 0 \\ a + b\,e^b + c\,\cos c - 1.23 = 0 \\ 2a + e^{2b} + \sin(2c) - 0.75 = 0 \end{cases}$$

   varför Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & e^{b_k} & \cos c_k \\ 1 & (1+b_k)\,e^{b_k} & \cos c_k - c_k\,\sin c_k \\ 2 & 2\,e^{2b_k} & 2\cos(2c_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_k + e^{b_k} + \sin c_k - 1 \\ a_k + b_k\,e^{b_k} + c_k\,\cos c_k - 1.23 \\ 2a_k + e^{2b_k} + \sin(2c_k) - 0.75 \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = v$, $y_2 = v' = y_1'$, $y_3 = z$, $y_4 = z' = y_3'$, $y_5 = w$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = t^2 + (y_1 + y_3)y_2 + y_4 + y_5^2 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_3 - y_1/(y_2 - t) - y_5 \\ y_5' = y_5 - y_3 - 2y_1 y_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(-4) = -0.3 \\ y_2(-4) = -0.3 \\ y_3(-4) = -0.1 \\ y_4(-4) = -0.2 \\ y_5(-4) = 0.4 \end{cases}$$

```
function [t, y] = uppg3
[t, y] = ode45(@f, linspace(-4, -3), [-0.3 -0.3 -0.1 -0.2 0.4]');

function yp = f(t, y)
yp = [y(2); t^2+(y(1)+y(3))*y(2)+y(4)+y(5)^2; y(4); ...
      y(3)-y(1)/(y(2)-t)-y(5); y(5)-y(3)-2*y(1)*y(4)];
```

4. a) Se föreläsningsanteckningarna.

   b) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, \ldots, m$ för maximalt m. Ekvationerna blir:

$$\begin{aligned} 1 &= w(1+1), \quad k=0 \\ 1/2 &= w(\alpha+\beta), \quad k=1 \\ 1/3 &= w(\alpha^2+\beta^2), \quad k=2 \\ 1/4 &= w(\alpha^3+\beta^3), \quad k=3 \\ 1/5 &= w(\alpha^4+\beta^4), \quad k=4 \end{aligned}$$

   Första ekvationen ger $w = 1/2$. Lös ut β från $k = 1$ och sätt in i $k = 2$. Detta ger $\alpha^2 - \alpha + 1/6 = 0$ så att $\alpha = (1 \pm 1/\sqrt{3})/2$. $k = 1$ tillsammans med villkoret $\alpha < \beta$ ger slutligen $\alpha = (1-1/\sqrt{3})/2$, $\beta = (1+1/\sqrt{3})/2$. Vi kollar $k = 3$-fallet. Utnyttjar vi binomialsatsen ser vi att $(1 + c)^3 + (1 - c)^3 = 2(1 + 3c^2)$ så att $w(\alpha^3 + \beta^3) = (1/2^4) \cdot 2(1 + 3/3) = 1/4$, vilket är lika med det exakta värdet. Stämmer det för $k = 4$? $(1 + c)^4 + (1 - c)^4 = 2(1 + 6c^2 + c^4)$, så $w(\alpha^4 + \beta^4) = (1/2^5) \cdot 2(1 + 6/3 + 1/9) = 7/36$ som är skilt från $1/5$. Så det polynomiella gradtalet är tre.

5. Algoritmen kan formuleras som följer:

$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x}$	n^2 +, *
$\rho = \mathbf{x}^T\mathbf{s}$	n +, *
$\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{x}$	n^2 +, *
$\rho = \rho/(\mathbf{x}^T\mathbf{s})$	n +, *
beräkna **A**s LU-faktorisering, spara i **A**	$n^3/6$ +, *
lös $\mathbf{LUs} = \mathbf{x}$	n^2 +, *
$\rho = \rho/(\mathbf{x}^T\mathbf{s})$	n +, *
beräkna **B**s LU-faktorisering, spara i **B**	$n^3/6$ +, *
lös $\mathbf{LUs} = \mathbf{x}$	n^2 +, *
$\rho = \rho\ (\mathbf{x}^T\mathbf{s})$	n +, *

   s är en temporär vektor om n element. Faktoriseringskostnaden dominerar med $2n^3/6 = n^3/3$ +,*.

6. Flytta över $\sqrt{2p_2}$ och kvadrera:

$$(c - \sqrt{2p_2})^2 = t + p_1 + p_2 \Rightarrow c^2 + 2p_2 - c2\sqrt{2p_2} = t + p_1 + p_2 \Leftrightarrow \underbrace{p_1 - p_2}_{x_1} + \sqrt{8}\, c \underbrace{\sqrt{p_2}}_{x_2} = \underbrace{c^2 - t}_{b}$$

   Inför $x_1 = p_1 - p_2$ och $x_2 = \sqrt{p_2}$. Raderna i **A** innehåller $[1, \sqrt{8}\, c_k], k = 1, \ldots, m$ och $b_k = c_k^2 - t_k$. Efter att vi har löst $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2$ sätter vi $p_2 = x_2^2$, varefter $p_1 = p_2 + x_1$. Detta leder inte till några problem, däremot är det ett allvarligt problem om $t_k + p_1 + p_2 < 0$ för något k. p_2 kan inte bli negativ på grund av kvadreringen.