Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2010-01-14

1. (a) Det betyder att små (relativa) förändringar av indata kan ge upphov till stora (relativa) förändringar av utdata (resultatet). För detaljer, se föreläsningsanteckningarna.

   (b) `sin(0) = 0`, så `sin(0)/0 = NaN` och `sin(0)/0-1 = NaN`
   `exp(10000)=Inf`, `log(exp(10000))=Inf`. `exp(log(10000))` $\approx$ `10000`, så att `log(exp(10000))-exp(log(10000))=Inf`. Så svaret blir `NaN, Inf`.

   (c) $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ och $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$.

   (d) Choleskyfaktoriseringen blir

$$\mathbf{A}/\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{15}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{15}/2 \end{bmatrix}$$

   (e) Problemet är ett linjärt minstakvadraproblem, som kan skrivas

$$\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2, \text{ med } \mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r]$$

   $\mathbf{Q}$ har full rang, r, eftersom kolonnerna är parvis ortogonala och ingen kolonn har längden noll. Normalekvationerna kan då användas och $\mathbf{x}$ blir, med $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_r)$:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b} \ \Rightarrow x_k = \mathbf{q}_k^T\mathbf{b}/d_k, \ k = 1, \ldots, r$$

   (f) Ja, vi kontrollerar de tre villkoren. Sätt $\mu(\mathbf{x}) = c||\mathbf{x}||$ så att vi enkelt förstår beviset.

      i. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mu(\mathbf{x}) > 0$ ty $||\mathbf{x}|| > 0$ ($||\ ||$ är ju en norm) och $c > 0$.
      ii. $\mu(\alpha\mathbf{x}) = c||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha|\,(c||\mathbf{x}||) = |\alpha|\,\mu(\mathbf{x})$
      iii. $\mu(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = c||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \le c(||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||) = \mu(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{y})$

   (g) Lös $x = g(x)$ med $g(x) = x + (x-a)(x-b)$ vilket ger $(x-a)(x-b) = 0$ så fixpunkterna är a och b. Nu till konvergensen: $|g'(x)| = |1 + 2x - (a+b)|$ så att $|g'(a)| = |1 + a - b|$ och $|g'(b)| = |1 + b - a|$. $|g'(a)| < 1 \Leftrightarrow -2 < a - b < 0$ och $|g'(b)| < 1 \Leftrightarrow -2 < b - a < 0$. Eftersom $a < b$ så kan inte b var en fixpunkt (svar nej på andra frågan). a kan vara en fixpunkt förutsatt att $-2 < a - b$.

2. Ekvationerna blir:

$$\begin{cases} a + b + \cos c - 1 = 0 \\ a + 2b - c\sin c - 1.23 = 0 \\ 2a + 4b + \cos(2c) - 0.75 = 0 \end{cases}$$

   varför Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sin(c_k) \\ 1 & 2 & -(\sin(c_k) + c_k\cos(c_k)) \\ 2 & 4 & -2\sin(2c_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_k + b_k + \cos c_k - 1 \\ a_k + 2b_k - c_k \sin c_k - 1.23 \\ 2a_k + 4b_k + \cos(2c_k) - 0.75 \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = v$, $y_2 = v' = y_1'$, $y_3 = z$, $y_4 = z' = y_3'$, $y_5 = w$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = t^2 + y_1y_2y_3 + y_4 + y_5^2 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_3 - y_1/(y_2 + t) - y_5 \\ y_5' = y_5 - y_3 - 2y_1y_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(-4) = -0.3 \\ y_2(-4) = -0.3 \\ y_3(-4) = -0.1 \\ y_4(-4) = -0.2 \\ y_5(-4) = 0.4 \end{cases}$$

```
function [t, y] = uppg3
[t, y] = ode45(@f, linspace(-4, -3), [-0.3 -0.3 -0.1 -0.2 0.4]');

function yp = f(t, y)
yp = [y(2); t^2+y(1)*y(2)*y(3)+y(4)+y(5)^2; y(4); ...
      y(3)-y(1)/(y(2)+t)-y(5); y(5)-y(3)-2*y(1)*y(4)];
```

4. a) Se föreläsningsanteckningarna.

   b) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, \ldots, m$ för maximalt m. Vi ser att metoden är exakt (värdet noll) för alla udda k. För övriga k blir ekvationerna:

$$\begin{array}{rcll} 2 &=& 2(w_1 + w_2), & k = 0 \\ 2/3 &=& 2(w_1 + w_2/4), & k = 2 \\ 2/5 &=& 2(w_1 + w_2/8), & k = 4 \\ & \ldots & & \end{array}$$

   $k = 0$ och $k = 2$ ger ett linjärt system med lösningen $w_1 = 1/9,\ w_2 = 8/9$. Metoden är inte exakt för $k = 4$ så det polynomiella gradtalet är tre.

5. Algoritmen kan formuleras som följer:

$\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{x}$	n^2 +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{s}$	n^2 +, *
$\mathbf{t} = 3\,\mathbf{t}$	n *
$\mathbf{s} = \mathbf{x}$	kopiera
beräkna **A**s LU-faktorisering, spara i **A**	$n^3/6$ +, *
beräkna **B**s LU-faktorisering, spara i **B**	$n^3/6$ +, *
lös $\mathbf{L}_A\mathbf{U}_A\mathbf{s} = \mathbf{s}$	n^2 +, *
lös $\mathbf{L}_B\mathbf{U}_B\mathbf{s} = \mathbf{s}$	n^2 +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{t} + 2\,\mathbf{s}$	n +, *
lös $\mathbf{L}_A\mathbf{U}_A\mathbf{s} = \mathbf{s}$	n^2 +, *
lös $\mathbf{L}_B\mathbf{U}_B\mathbf{s} = \mathbf{s}$	n^2 +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{t} + \mathbf{s}$	n +

   s och **t** är temporära vektorer om n element. Faktoriseringskostnaden dominerar med $2n^3/6 = n^3/3$ +,*.

6. Flytta över $\sqrt{2p_2}$ och kvadrera:

$$(c - \sqrt{2p_2})^2 = t + p_1p_2 \Rightarrow c^2 + 2p_2 - c2\sqrt{2p_2} = t + p_1p_2 \Leftrightarrow \underbrace{p_1p_2 - 2p_2}_{x_1} + \sqrt{8}\,c\,\underbrace{\sqrt{p_2}}_{x_2} = \underbrace{c^2 - t}_{b}$$

   Inför $x_1 = p_1p_2 - 2p_2$ och $x_2 = \sqrt{p_2}$. Raderna i $\mathbf{A}$ innehåller $[1, \sqrt{8}\,c_k], k = 1, \ldots, m$ och $b_k = c_k^2 - t_k$. Efter att vi har löst $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2$ sätter vi $p_2 = x_2^2$, varefter $p_1 = (2p_2 + x_1)/p_2$.