Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Tentamen: Numerisk Analys, MMG410 (MAN200, MAM240), GU, 2008-05-30, V

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se. Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 12.30.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

(a) Vad är "Runges fenomen". (1p)

(b) Beräkna $\kappa_1(\mathbf{A})$, som funktion av ϵ, då:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \quad 0 < \epsilon \leq 1 \quad (1p)$$

(c) Vilken utskrift, om någon, ger Matlab av följande?
`x=1; for k=1:1000, if exp(x)+x == exp(x), x, break, end, x = 2 * x; end`
Här lite ledning ('%10.1e' är bara ett utskriftsformat, för att tabellen skall få plats). (1p)

```
>> disp(sprintf('%10.1e', exp(0:10:230)))
   1.0e+00   2.2e+04   4.9e+08   1.1e+13   2.4e+17   5.2e+21   1.1e+26   2.5e+30
   5.5e+34   1.2e+39   2.7e+43   5.9e+47   1.3e+52   2.9e+56   6.3e+60   1.4e+65
   3.1e+69   6.8e+73   1.5e+78   3.3e+82   7.2e+86   1.6e+91   3.5e+95   7.7e+99
```

(d) Vilken utskrift ger Matlab av följande? `sin(1/sin(1/0)), sin(1/(sin(1)/0))` (1p)

(e) Beräkna $\mathbf{A}$:s $\mathbf{LDL}^T$-faktorisering då:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad (2p)$$

(f) $\mathbf{A}$ är en symmetrisk matris. Det existerar två positiva heltal j och k, $j \neq k$, så att $a_{j,j} = a_{j,k} = a_{k,k}$. Bevisa att $\mathbf{A}$ **inte** är positivt definit. (2p)

(g) Bestäm (på något sätt) QR-faktoriseringen av $\mathbf{A}$ och använd den för att lösa minstakvadratproblemet $\min_{\mathbf{x}} \ ||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2$ då $\mathbf{b}^T = [2, -2, 0]$. Lösning med normalekvationerna ger **inga** poäng.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2p)$$

Var god vänd!

2. Vi har tre positiva tal x, y och z. Talens aritmetiska medelvärde definieras som $M = (x + y + z)/3$. Geometriska medelvärdet är $G = (xyz)^{1/3}$ och det harmoniska medelvärdet, H, definieras av $1/H = (1/x + 1/y + 1/z)/3$. Vi vill finna x, y och z så att $M = 4$, $G = 2$ och $H = 1$. Ställ upp Newtons metod för detta problem. Du får förenkla varje **enskild** ekvation så att räkningarna blir enklare, men det är **inte tillåtet** att kombinera ekvationer för att förenkla problemet. (3p)

3. Skriv om följande problem på standardform och skriv sedan den **Matlabkod** som behövs för att beräkna approximationer till lösningen för 100 ekvidistanta t-värden i intervallet $t \in [-2, 0]$.

$$\begin{cases} u' = -tu + 2v - 3(v')^2 - v'' \\ v''' = uv - v'v'' - t \end{cases}, \quad \begin{cases} u(-2) = 0, \\ v(-2) = -1, v'(-2) = 2, v''(-2) = -3 \end{cases}, \quad (3\text{p})$$

4. a) Bilda interpolationspolynomet, **på Lagranges form**, som interpolerar i punkterna (t_1, y_1), (t_2, y_2) och (t_3, y_3), $t_1 < t_2 < t_3$. (1.5p)

   b) Välj w_1, w_2, w_3 i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal som möjligt. Vad blir detta gradtal? (1.5p)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1)$$

5. $\mathbf{A}$ är en osymmetrisk och ickesingulär matris av ordning n. $\mathbf{a}$ är en känd kolonnvektor med n element, där $||\mathbf{a}||_2 = 1$. Vi vill beräkna γ som definieras genom:

$$\gamma = \mathbf{a}^T \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-2}\right) \mathbf{a}$$

   Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer krävs (uttryckt i n)? Varken matris eller vektor behöver finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. En av de modeller för viskositet, v, som Gordon Fulcher undersökte, var

$$v = \alpha\, e^{-B/T + C/T^2}$$

   där T är den absoluta temperaturen. Antag att vi har mätt v vid en uppsättning temperaturer $T_1, T_2, \ldots, T_n$, så vi har alltså mätpunkter (T_k, v_k), $k = 1, \ldots n$. Vi vill bestämma parametrarna α, B och C. Parametrarna ingår ickelinjärt i modellen, men genom att göra lämpliga transformationer kan vi skapa en linjär modell. Gör det och ställ sedan upp ett **linjärt** minstakvadratproblem med vars hjälp vi kan bestämma parametrarna. Matrisen $\mathbf{A}$ och vektorn $\mathbf{b}$ skall redovisas! Redogör slutligen för hur vi får fram värdena på parametrarna givet lösningen på minstakvadratproblemet. Kan detta sista steg orsaka några problem? (3p)