

MMG600 Reell analys

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559

Telefonvakt: tel 0703 08 83 04

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Språklexikon är tillåtet.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 20 poäng krävs för betyget VG.

Lösningförslag hängs på anslagstavlan i korridoren utanför MVF 23.

Resultat meddelas via Ladok, granskning sker på studieexpeditionen.

1. Låt (X, d_X) och (Y, d_Y) vara metriska rum.

(a) Definiera begreppen *öppen boll* (*omgivning*) respektive *öppen mängd* i X .

(b) Definiera begreppet *kontinuerlig funktion* från X till Y .

(c) Visa att $f : X \rightarrow Y$ är kontinuerlig på X om och endast om $f^{-1}(V)$ är öppen i X för varje öppen mängd V i Y .

(d) Använd satsen ovan (även om du inte bevisat den) för att motivera att mängden $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) ; x_1 + x_2 + x_3 < x_4 < x_1 x_2 x_3\}$ är öppen i $\mathbb{R}^4$. (6p)

2. Definiera vad som menas med att ett metriskt rum är *kompakt* respektive *fullständigt*.

Visa att varje kompakt metriskt rum är fullständigt. (3p)

3. (a) Låt (M, d) vara ett fullständigt metriskt rum och låt $\phi : M \rightarrow M$ vara en kontraktion på M . Visa att ϕ har en entydigt bestämd fixpunkt.

(b) Låt $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ för $x \in [1, 2]$. Avgör om f är en kontraktion på $[1, 2]$. (4p)

4. (a) Definiera begreppet *likformig konvergens*.

(b) Undersök om funktionsföljden

$$f_n(x) = x^{\sqrt{n}}$$

konvergerar likformigt på $]0, \infty[$. (3p)

5. Låt $M = \{(xy, \cos xy, \tan xy, x - y) \in \mathbb{R}^4 ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \pi/2\}$. Avgör om M är kompakt och/eller sammanhängande i $\mathbb{R}^4$. (3p)

6. Låt $f(x, y) = (x \cos y, \sin y)$. Bestäm de punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vid vilka f är lokalt invertierbar. Om punkten $(1, \pi/4)$ ingår bland dessa, så låt g beteckna den lokala inversen till f vid $(1, \pi/4)$ och bestäm den linjära approximationen av g vid $f(1, \pi/4)$. (3p)

7. Låt $T : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad av

$$Tf = \max_{x \in [0, 1]} f(x).$$

Visa att T är likformigt kontinuerlig på $\mathcal{C}([0, 1])$, mängden av alla reellvärda kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$ försedd med supremumnormen. (3p)

Lycka till!

Ulla