**MAN140, Lösningar till tentamen 21/12 2005**

1. (a) Maclaurin-utveckling ger:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^4 B_2(x),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^4 B_3(x),$$

där funktionerna $B_1,\ B_2,\ B_3$ är begränsade i en omgivning av 0. Härav följer

$$\frac{\sin x - \ln(1+x)}{1-\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^5 B_1(x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x^4 B_2(x)}{\frac{x^2}{2} - x^4 B_3(x)}.$$

Med $B_4(x) = xB_1(x) - B_2(x)$ kan detta skrivas

$$\frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + x^4 B_4(x)}{\frac{x^2}{2} - x^4 B_3(x)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{2} + x^2 B_4(x)}{\frac{1}{2} - x^2 B_3(x)} \to 1,\ \text{då } x \to 0.$$

(b) Radreducera:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom vi har två pivotpositioner, är rangen för $A$ två.

(c) Integrerande faktor är $e^x$ så lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = e^{-x}\Big(\int 100e^x\,dx\Big) + Ce^{-x} = e^{-x}(100e^x) + Ce^{-x} = 100 + Ce^{-x},$$

där $C$ är en konstant. Genom att använda begynnelsevillkoret finner vi att

$$50 = y(0) = 100 + Ce^0 = 100 + C \text{ så } C = -50$$

och lösningen är

$$y(x) = 100 - 50e^{-x}.$$

(d) Vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1,-1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,0,-1)$ och $\mathbf{v}_3 = (1,5,2)$ är parvis ortogonala. Om $\mathbf{u} = (3,4,5) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, är

$$c_1 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} = \frac{3-4+10}{1+1+4} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2},$$
$$c_2 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2} = \frac{6+0-5}{4+0+1} = \frac{1}{5},$$
$$c_3 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|^2} = \frac{3+20+10}{1+25+4} = \frac{33}{30} = \frac{11}{10}.$$

2. (a) Falskt. Matrisen $A$ är symmetrisk, och symmetriska matriser har bara reella egenvärden.

   (b) Sant. En funktion som uppfyller kraven är t.ex. $f$ given genom $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

   (c) Falskt. Enligt t.ex. Cauchy's integralkriterium (Sats 2, sid 343) är, med $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent om och endast om den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent. Då

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{X\to\infty} \int_1^X \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{X\to\infty} \arctan X - \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

   är serien konvergent.

   (d) Sant.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

   så båda vektorerna är egenvektorer hörande till egenvärdet 1.

   (e) Sant. Eftersom $\frac{1}{x+e^x} \leq \frac{1}{e^x}$ för $x \geq 0$ är

$$\int_1^X \frac{1}{x+e^x}\,dx \leq \int_1^X \frac{1}{e^x}\,dx = \int_1^X e^{-x} = 1 - e^{-X},$$

   för alla $X > 1$ så

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x+e^x}\,dx = \lim_{X\to\infty} \int_1^X \frac{1}{x+e^x}\,dx \leq \lim_{X\to\infty} 1 - e^{-X} = 1.$$

   (f) Sant. För en godtycklig matris är nollrummet ortogonalt mot radrummet, men för en symmetrisk matris är radrummet lika med kolonnrummet.

3. Först bestämmer vi skärningspunkterna mellan de båda kurvorna. Enklast sker det väl i det här fallet genom att lösa ut de y-värden som ger samma x-värden: parabeln kan skrivas som $x = 2-y^2$ och linjen som $x = 2y+2$. Detta ger ekvationen $2-y^2 = 2y+2 \Leftrightarrow y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow y(y+2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ eller $y = -2$. Från t.ex. linjens ekvation finner vi att $y = 0$ ger $x = 2$ och $y = -2$ ger $x = -2$. Det är lämpligt att göra en enkel skiss över kurvorna, se Figur 1 nedan. Från denna och de just funna skärningspunkterna är det klart att den sökta arean $A$ är

$$A = \int_{-2}^{2} \left(\frac{x}{2} - 1 - (-\sqrt{2-x})\right)dx = \int_{-2}^{2} \left(\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2-x}\right)dx.$$

Då $\int_{-2}^{2}(\frac{x}{2} - 1)\,dx = [\frac{x^2}{4} - x]_{-2}^{2} = -4$ och

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{2-x}\,dx = [\text{ gör substitutionen } 2-x = t] = \int_4^0 t^{\frac{1}{2}}(-1)\,dt = \int_0^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

får vi $A = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = 0$ ger $\lambda = 1 \pm 3$.

   $\lambda_1 = 4$. $A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ger ekvationen $x_1 = x_2$ och egenvektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   $\lambda_2 = -2$. $A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ger ekvationen $x_1 = -x_2$ och egenvektorn $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   Med $P = [\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ blir $P^{-1}AP = D$.

5. En primitiv funktion till $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ är $G(x) = \ln(1+x^2)$ så integrerande faktor är $e^{G(x)} = 1 + x^2$ och $e^{-G(x)} = \frac{1}{1+x^2}$. Den allmänna lösningen är därför

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}\Big(\int e^x(1+x^2)\,dx\Big) + C\frac{1}{1+x^2}.$$

   För att beräkna $\int e^x x^2\,dx$ integrerar vi partiellt två gånger och får $\int e^x x^2\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x$. Då $\int e^x\,dx = e^x$ är

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}(x^2 - 2x + 3)e^x + C\frac{1}{1+x^2} = \frac{(x^2 - 2x + 3)e^x + C}{1+x^2}.$$

6. a) $A = [\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2]$, $\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2\}$. Ortogonalisera:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{0 - 2 - 8 + 4}{0 + 1 + 4 + 1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

   $\{\mathbf{u}_1, \ \mathbf{u}_2\}$ är en ortogonalbas för $\operatorname{Col} A$.

   b) Den punkt i $\operatorname{Col} A$ som ligger närmast $\mathbf{y} = [1 \ \ -2 \ \ -1 \ \ 2]^{\mathrm{T}}$ är

$$\hat{\mathbf{y}} = \operatorname{proj}_{\operatorname{Col} A}\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \frac{2}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{13}{39}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

7. Låt $y(t)$ vara kaffets temperatur vid tiden $t$ (minuter) efter det fyllts på i koppen. Enligt Newtons avsvalningslag är $y'(t) = k(y(t) - 21)$ där $k$ är en proportionalitetskonstant. Vidare vet vi att $y(0) = 82$ och $y(2) = 73$. Det är klart att $y(t) > 21$ så vi kan dividera med $y(t) - 21$ och får

$$\frac{y'}{y - 21} = k.$$

Detta är en separabel differentialekvation med den allmänna lösningen

$$\ln|y(t) - 21| = kt + C$$

där $C$ är en konstant. Då $y(t) > 21$ kan vi skriva $y(t) = 21 + e^{kt+C} = 21 + C_1 e^{kt}$, med $C_1 = e^C$. Villkoret $y(0) = 82$ ger

$$82 = y(0) = 21 + C_1 e^{k \cdot 0} = 21 + C_1 \Rightarrow C_1 = 82 - 21 = 61.$$

Vi har därför $y(t) = 21 + 61e^{kt}$ och villkoret $y(2) = 73$ ger

$$73 = y(2) = 21 + 61e^{2k} \Rightarrow 61e^{2k} = 73 - 21 = 52 \Rightarrow 2k = \ln\frac{52}{61},$$

dvs. $k = \frac{1}{2}\ln\frac{52}{61} = \ln\sqrt{\frac{52}{61}}$. Temperaturen vid en godtyckligt vald tidpunkt $t$ är därför

$$y(t) = 21 + 61e^{\ln(\sqrt{\frac{52}{61}})t} = 21 + 61 \cdot \left(\sqrt{\frac{52}{61}}\right)^t.$$

Om $T$ är antalet minuter efter påfyllningen tills kaffet har temperaturen 48 grader får vi t.ex. på samma sätt som ovan att $48 = y(T) = 21 + 61e^{kt} \Rightarrow e^{kT} = \frac{27}{61}$, vilket ger

$$T = \frac{\ln 27 - \ln 61}{\frac{1}{2}(\ln 52 - \ln 61)} = 2\frac{\ln 61 - \ln 27}{\ln 61 - \ln 51} \approx 9.10.$$

8. Med $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.7 & 0.9 \end{bmatrix}$ har vi ekvationen $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$. Bestäm egenvärden och egenvektorer till $A$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.3 - \lambda & 0.1 \\ 0.7 & 0.9 - \lambda \end{vmatrix} = (0.3 - \lambda)(0.9 - \lambda) - 0.07 = \lambda^2 - 1.2\lambda + 0.2 = 0$$

ger $\lambda = 0.6 \pm \sqrt{0.36 - 0.2} = 0.6 \pm 0.4$. Egenvärdena är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 0.2$.

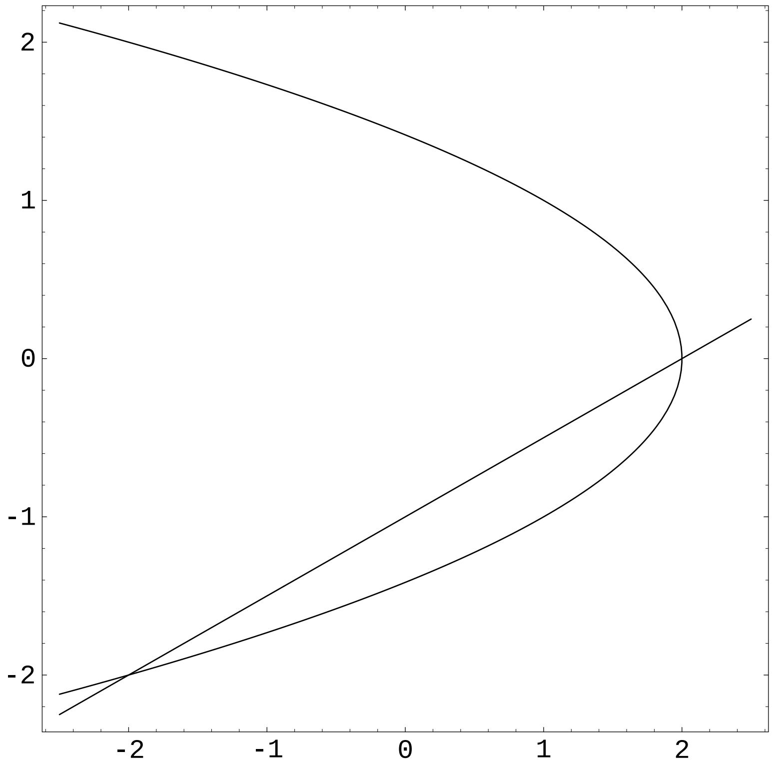
$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.1 \\ 0.7 & -0.1 \end{bmatrix}$ ger ekvationen $7x_1 = x_2$ och egenvektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$ ger ekvationen $x_2 = -x_1$ och egenvektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Allmänna lösningen är $\mathbf{x}_n = c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2$. Begynnelsevillkoret ger $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \end{bmatrix}$ med lösning $c_1 = 20$, $c_2 = 80$. Alltså är

$$\mathbf{x}_n = 20\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} + 80 \cdot 0.2^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{cases} x_n = 20 + 80 \cdot 0.2^n \\ y_n = 140 - 80 \cdot 0.2^n \end{cases}$$

så att $x_n \to 20$ och $y_n \to 140$ då $n \to \infty$.




Figur 1: Kurvorna i uppgift 3.