

Tentamen MMGF10

Fredag 21 augusti 2009, kl. 08.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

(a) Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{x^2} - \cos x)}{\arctan x - \sin x}.$$

(b) Vektorerna $[1 \ 2 \ 1]^T$ och $[1 \ -1 \ 1]^T$ spänner upp ett underrum W av $\mathbb{R}^3$. Bestäm ortogonala projektionen av $[2 \ 1 \ 4]^T$ på W .

(c) Lös begynnelsevärdeproblemet $y' = xy^2$, $y(0) = 1$.

(d) Finn rangen för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

(a)

$$2 \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 6.$$

(b) Om $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ är en bas för $\mathbb{R}^4$ och W ett underrum av $\mathbb{R}^4$ så bildar en delmängd av $\mathcal{B}$ en bas för W .

(c) Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

är divergent.

(d) Om egenvärdena för matrisen A är 1, 1, 2 så är A inte diagonaliserbar.

(e) Låt

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin t^2 dt. \text{ Då är } |f(x)| < \frac{2}{x} \text{ för } x > 0.$$

(f) Det finns en matris A sådan att kolonnrummet innehåller vektorerna $[1 \ 0 \ 0]^T$, $[0 \ 0 \ 1]$ och radrummet innehåller $[1 \ 1]^T$, $[1 \ 2]$.

3. Bestäm arean av det ändliga område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = \sin x$ och $y = \frac{2}{\pi}x$.
4. Matrisen A har egenvektorererna $[1 \ 3]^T$ och $[2 \ 5]^T$ med egenvärden 1 och 2. Bestäm A .
5. Lös differentialekvationen

$$y' = y^2(1 + x^2).$$

6. Låt W vara underrummet av $\mathbb{R}^4$ bestående av alla $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ sådana att $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Finn en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$ till W .
7. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + y(t) \end{cases}$$

där $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

8. Låt $v(t)$ vara farten hos en fallande kropp med massan m och g vara jordens tyngdacceleration på den aktuella platsen. Kroppens rörelse bromsas av luftmotståndet, som antas vara proportionellt mot kvadraten på farten, med proportionalitetskonstant k . Ange farten vid en godtyckligt vald tidpunkt t om $v(0) = v_0$.

Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$