

Analys och linjär algebra, del 2 (MAN140)

Tentamen den 21 december 2005, 8.30–13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger fyra poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

- (a) Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{1 - \cos x}.$$

- (b) Bestäm rangen för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (c) Lös begynnelsevärdeproblemet

$$\begin{cases} y' + y = 100 \\ y(0) = 50. \end{cases}$$

- (d) Bestäm tal c_1 , c_2 och c_3 så att

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

- (a) Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

har ett egenvärde $1 + 2i$.

- (b) Det finns en funktion f som är kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$, deriverbar för $0 < x < 1$ och sådan att $\int_0^1 f(x) dx = 1$ men $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$.

(c) Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

är divergent.

(d) Matrisen A i a-uppgiften har egenvektorererna $\mathbf{v}_1 = [0 \ 1 \ 1]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [2 \ 0 \ 1]^T$.

(e)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+e^x} dx \leq 1.$$

(f) För en symmetrisk matris är nollrummet ortogonalt mot kolonnrummet.

3. Beräkna arean av det ändliga område i xy -planet som begränsas uppåt av linjen $y = \frac{x}{2} - 1$ och nedåt av parabeln $y^2 = 2 - x$.

4. Diagonalisera matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = e^x.$$

6. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Ange en ortogonalbas för kolonnrummet $\text{Col } A$.

(b) Bestäm den punkt i $\text{Col } A$ som ligger närmast punkten $[1 \ -2 \ -1 \ 2]^T$.

7. Kaffet från en kaffeautomat har temperaturen 82°C när det just fyllts på i en kopp. Efter 2 minuter i ett rum med temperaturen 21°C har dess temperatur sjunkit till 73°C . Finn den temperatur som kaffet i koppen har vid en godtyckligt vald tidpunkt t och bestäm när dess temperatur sjunkit till 48°C .

Vi förutsätter att avsvälningen följer Newtons avsvälningsslag, som säger att hastigheten med vilken temperaturen hos en kropp ändras är proportionell mot temperaturskillnaden mellan kroppen och dess omgivning.

8. I en bägare med is och vatten av en viss temperatur börjar vattnet att frysa. Processen sker så att varje minut omvandlas 70% av vattnet till is, medan 10% av isen omvandlas tillbaka till vatten. Antag att det från början fanns 100 g vatten och 60 g is i bägaren. Beräkna mängden vatten respektive is efter n minuter. Vad händer då $n \rightarrow \infty$?

Ledning: Låt x_n vara mängden vatten och y_n mängden is efter n minuter. Texten ger följande ekvationer:

$$x_{n+1} = 0.3x_n + 0.1y_n$$

$$y_{n+1} = 0.7x_n + 0.9y_n$$

där $x_0 = 100$, $y_0 = 60$.

Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$