

Tentamen MMGF11

Onsdag 18 augusti 2010, kl. 08.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

(a) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin(2x)}.$$

(b) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $(1, 1, 0)$ och $(1, 0, 1)$.

(c) Bestäm $\sin v$ om $v = \arctan \frac{4}{3}$.

(d) Ange arean av den triangel, vars hörn är punkterna $P_1 = (4, 1, 2)$, $P_2 = (6, 2, -1)$ och $P_3 = (3, 3, 4)$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

(a) Det finns en funktion f definierad för alla reella tal, som är lika med sin derivata av godtyckligt vald ordning, dvs. sådan att $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(k)}(x)$ för alla k .

(b) Det finns ingen 2×2 -matris A med alla matriselement nollskilda sådan att A^2 är nollmatrisen.

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}.$$

(d) Om $\mathbf{u} = (1, 3, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 4)$ och $\mathbf{w} = (2, 2, -1)$ så kan man bestämma konstanten k så att vektorerna $\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ blir vinkelräta.

(e) För alla $x > 0$ är $2\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x}$.

(f) Man kan bestämma konstanten a så att punkterna $P_1 = (1, a, a^2)$, $P_2 = (-4, 5, 0)$ och $P_3 = (5, -1, 3a)$ ligger på en rät linje.

3. Avgör om vektorerna $\mathbf{u} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 4\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 4\mathbf{c}$, där $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är tre vektorer, som inte ligger i ett plan, är linjärt beroende eller oberoende.

4. Rita kurvan

$$y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

i stora drag.

5. Bestäm minsta avståndet från punkten $(1, -1, 3)$ till linjen $(x, y, z) = (4 + 3t, -2 - t, 2t)$.

6. Bestäm konstanten a så att funktionen f definierad genom

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + ax} - 1}{x}$$

för $x \neq 0$ och $f(0) = 4$ blir kontinuerlig.

7. För vilka värden på konstanterna a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & -2y & +3z & = & b \\ 3x & -y & +az & = & 2 \end{cases}$$

precis en lösning, flera olika lösningar resp. ingen lösning? Bestäm alla lösningar då systemet är lösbart.

8. Bestäm samtliga lokala max- och minpukter till funktionen f given av

$$f(x) = |x + 2|e^{-x}.$$