Matematik
Göteborgs universitet
R. Andersson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare är tillåten
Telefonvakt: Jonatan Vasilisa
tel 0703 - 088304

Tentamen MMGF11

Onsdag 18 augusti 2010, kl. 08.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Beräkna
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin(2x)}.$$

   (b) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $(1,1,0)$ och $(1,0,1)$.

   (c) Bestäm $\sin v$ om $v = \arctan\frac{4}{3}$.

   (d) Ange arean av den triangel, vars hörn är punkterna $P_1 = (4,1,2)$, $P_2 = (6,2,-1)$ och $P_3 = (3,3,4)$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Det finns en funktion f definierad för alla reella tal, som är lika med sin derivata av godtyckligt vald ordning, dvs. sådan att $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(k)}(x)$ för alla k.

   (b) Det finns ingen 2×2−matris A med alla matriselement nollskilda sådan att A^2 är nollmatrisen.

   (c)
   $$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}.$$

   (d) Om $\mathbf{u} = (1,3,-1)$, $\mathbf{v} = (0,2,4)$ och $\mathbf{w} = (2,2,-1)$ så kan man bestämma konstanten k så att vektorerna $\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ blir vinkelräta.

   (e) För alla $x > 0$ är $2\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x}$.

   (f) Man kan bestämma konstanten a så att punkterna $P_1 = (1,a,a^2)$, $P_2 = (-4,5,0)$ och $P_3 = (5,-1,3a)$ ligger på en rät linje.

3. Avgör om vektorerna $\mathbf{u} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 4\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 4\mathbf{c}$, där $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är tre vektorer, som inte ligger i ett plan, är linjärt beroende eller oberoende.

4. Rita kurvan
   $$y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$
   i stora drag.

5. Bestäm minsta avståndet från punkten $(1, -1, 3)$ till linjen $(x, y, z) = (4+3t, -2-t, 2t)$.

6. Bestäm konstanten a så att funktionen f definierad genom

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{x}$$

för $x \neq 0$ ocn $f(0) = 4$ blir kontinuerlig.

7. För vilka värden på konstanterna a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & -2y & +3z & = & b \\ 3x & -y & +az & = & 2 \end{cases}$$

precis en lösning, flera olika lösningar resp. ingen lösning? Bestäm alla lösningar då systemet är lösbart.

8. Bestäm samtliga lokala max- och minpukter till funktionen f given av

$$f(x) = |x+2|e^{-x}.$$

Kortfattade lösningar till Tentamen MMGF11

Onsdag 18 augusti 2010.

①

(1)

(a) $\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin(2x)} = \dfrac{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2x} = \dfrac{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot 3}{\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\frac{\sin(2x)}{2x}} \to \dfrac{3}{2}$, då $x \to$

(b)

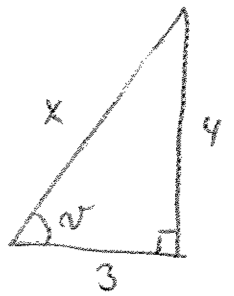
$u = (1,1,0),\ v = (1,0,1)$

$u \cdot v = (1,1,0)\cdot(1,0,1) = 1$

$|u| = \sqrt{2},\ |v| = \sqrt{2}$

$u \cdot v = |u|\cdot|v|\cdot\cos\theta \iff 1 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\theta \iff \cos\theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{3}$

(c) $v = \arctan\frac{4}{3}$ är den vinkel i intervallet $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ för vilken $\tan v = \frac{4}{3}$. Då tan är udda och $\tan v > 0$ måste $v > 0$ s.a. $v \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Följande hjälptriangel ger lösningen.



$\tan v = \frac{4}{3}$

$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \iff x = \pm 5$

$\sin v = \frac{3}{5}$

(d) $P_1 = (4,1,2),\ P_2 = (6,2,-1),\ P_3 = (3,3,4)$

$u = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (6,2,-1) - (4,1,2) = (2,1,-3)$

$v = \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (3,3,4) - (4,1,2) = (-1,2,2)$

$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = e_1(2+6) - e_2(4-3) + e_3(4+1) = (8,-1,5)$

$|u \times v| = \sqrt{64+1+25} = \sqrt{90} = \sqrt{9\cdot 10} = 3\sqrt{10}$

Arean är $\frac{1}{2}|u \times v| = \frac{3}{2}\sqrt{10}$

②

(a) Sant. Med $f(x)=e^x$ har vi $f'(x)=e^x$, $f''(x)=De^x=e^x$ osv.

(b) Falskt. Låt

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Då är

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

Låt $d=-a$. Då är

$$A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{bmatrix}$$

Med $bc=-a^2$ är A^2 nollmatrisen, medan elementen i A i allmänhet alla är nollskilda. Välj t.ex. $a=1$, $d=-1$ $b=-1$, $c=1$. Kontroll

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Falskt. Vi har

$$\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{(x^2+3x)-(x^2+1)}{|x|(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}=$$

$$=\frac{3x-1}{|x|(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}=3\cdot\frac{x}{|x|}\cdot\frac{1-\frac{1}{3x}}{(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}\to\begin{cases}\frac{3}{2}, & \text{då } x\to+\infty\\ -\frac{3}{2}, & \text{då } x\to-\infty\end{cases}$$

(d) Falskt

$(\mathbf{u}+k\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+k\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$.

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=(1,3,-1)\cdot(2,2,-1)=2+6+1=9$

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=(0,2,4)\cdot(2,2,-1)=4-4=0$

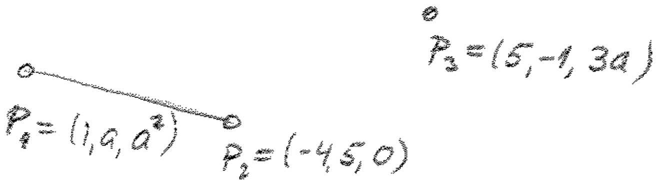
$(\mathbf{u}+k\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=9+k\cdot 0=9\neq 0$ för alla k.

(e) Sant. Sätt $f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x} = 2\cdot x^{\frac{1}{2}} - 3 + x^{-1}$. Då är

$$f'(x) = 2\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1\cdot x^{-2} = x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\,(x\sqrt{x}-1)}{x^2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$$

Här $f'(x) > 0$ för $x > 1$ medan $f'(x) < 0$ för $0 < x < 1$. Det betyder att f har strängt lokalt minimum, som också ger funktionens minsta värde för $x = 1$. Då $f(1) = 2\sqrt{1} - 3 + \frac{1}{1} = 0$ följer att $f(x) \geq 0$ för alla $x > 0$.

(f) Sant.



P_3 ligger på linjen genom P_1 med $v = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (-4,5,0) - (1,a,a^2) =$
$= (-5, 5-a, -a^2)$ som riktningsvektor $\Leftrightarrow$ det finns ett $t \in \mathbb{R}$ s.a. $P_3 = P_1 + tv \Leftrightarrow P_3 - P_1 = tv$.

Då $P_3 - P_1 = (5,-1,3a) - (1,a,a^2) = (4, -1-a, 3a-a^2)$ är detta ekvivalent med att

$$(4, -(1+a), 3a-a^2) = t(-5, 5-a, -a^2).$$

Detta ger $4 = -5t \Leftrightarrow t = -\frac{4}{5}$ och därmed

$$(4, -(1+a), 3a-a^2) = -\frac{4}{5}(-5, 5-a, -a^2) = \left(4, \frac{4(a-5)}{5}, \frac{4a^2}{5}\right).$$

Andra komponenterna är lika $\Leftrightarrow -(1+a) = \frac{4(a-5)}{5} \Leftrightarrow$
$-5-5a = 4a - 20 \Leftrightarrow 15 = 9a \Leftrightarrow a = \frac{3\cdot 5}{3\cdot 3} = \frac{5}{3}$. Med $a = \frac{5}{3}$ får vi

$$3a - a^2 = 3\cdot\frac{5}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 5 - \frac{25}{9} = \frac{45-25}{9} = \frac{20}{9}$$

$\frac{4a^2}{5} = \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{25}{9} = \frac{4\cdot 5\cdot 5}{5\cdot 9} = \frac{20}{9}$, så även tredje komponenterna är lika

3. $x_1\mathbb{u} + x_2\mathbb{v} + x_3\mathbb{w} = x_1(\mathbb{a}+3\mathbb{b}-2\mathbb{c}) + x_2(\mathbb{a}+4\mathbb{b}-\mathbb{c}) + x_3(\mathbb{a}+\mathbb{b}-4\mathbb{c}) =$

$= (x_1+x_2+x_3)\mathbb{a} + (3x_1+4x_2+x_3)\mathbb{b} + (-2x_1-x_2-4x_3)\mathbb{c} = \mathbb{0}.$

Då $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ inte ligger i ett plan, är de linjärt oberoende så linjärkombinationen ovan är $\mathbb{0} \iff$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ -3 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det visar att det homogena ekvationssystemet har icke-trivial lösning, så vektorerna $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$ är linjärt oberoende.

4. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

1. Beräkna derivatan

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{3x^2(x+1) - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{3x^3+3x^2-2x^3}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3} = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = 0$$

2. Derivatans nollställen

$\iff x = 0$ eller $x = -3$

3. Teckenschema och värdetabell

x		-3		-1		0	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{27}{4}$	$\searrow$	odef	$\nearrow$	0	$\nearrow$

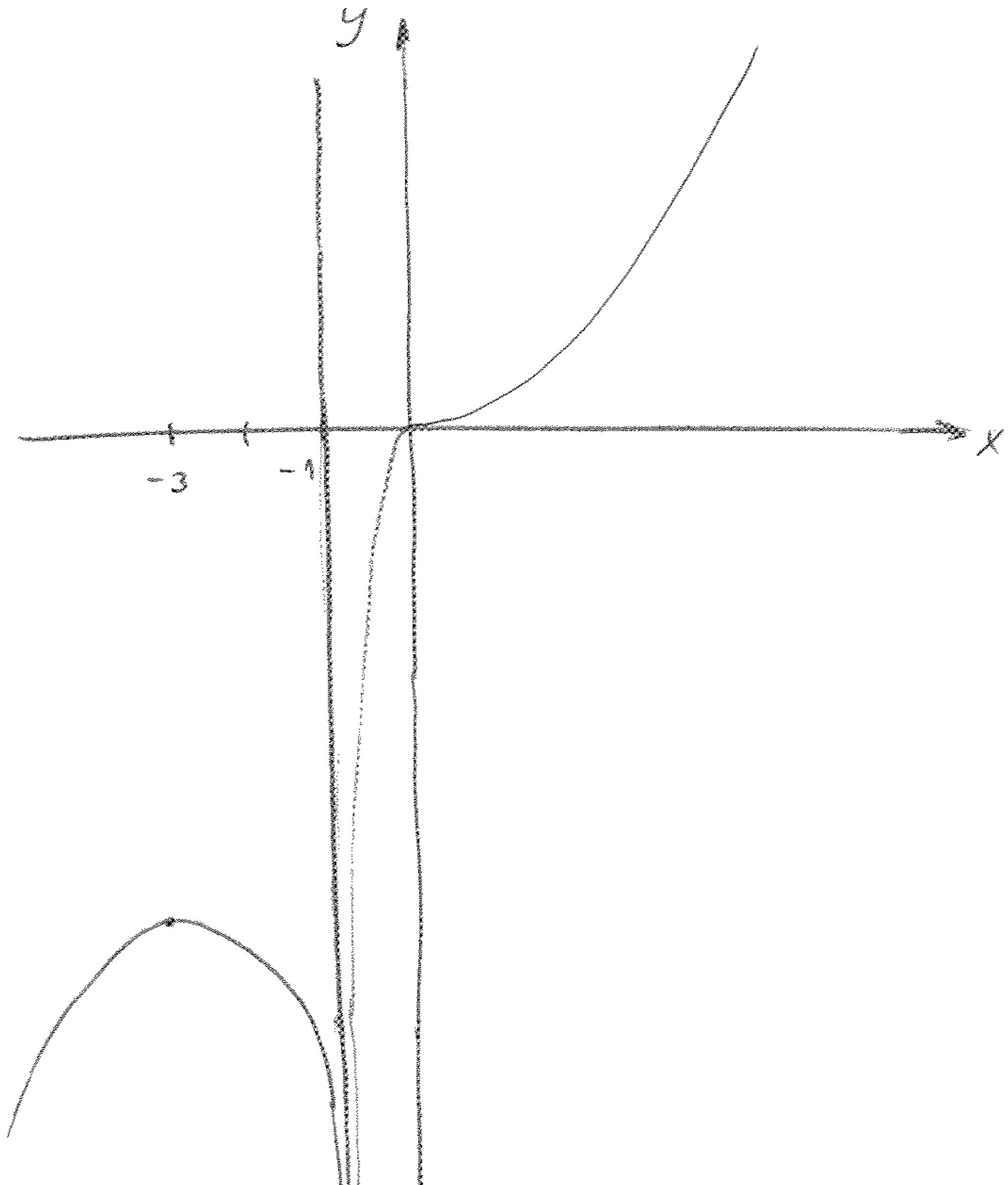
$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3+1)^2} = \frac{-27}{(-2)^2} = -\frac{27}{4}$$

4. Gränsvärdesberäkningar

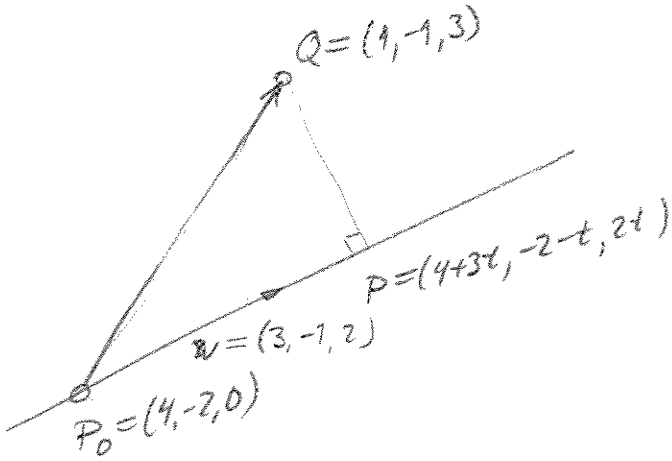
$f(x) \to -\infty$, då $x \to -1$ (både från höger och vänster)

$f(x) \to +\infty$, då $x \to +\infty$

$f(x) \to -\infty$, då $x \to -\infty$



⑤ En punkt P_0 på linjen är $P_0=(4,-2,0)$ som vi får ⑥
för $t=0$.



Ett (bland många) sätt att lösa uppgiften är att bestämma P s.a. $\overrightarrow{QP}\perp v$, där v är en riktningsvektor för linjen.

Detta ger, då $\overrightarrow{QP}=Q-P=P-Q=(4+3t,-2-t,2t)-(1,-1,3)=(3+3t,-1-t,2t-3)$

$$0=\overrightarrow{QP}\cdot v=(3+3t,-1-t,2t-3)\cdot(3,-1,2)=3(3+3t)+(1+t)+2(2t-3)=$$

$$=9+9t+1+t+4t-6=14t+4 \Longrightarrow t=-\frac{4}{14}=-\frac{2}{7}.$$

För detta t-värde är

$$P=\left(4-\frac{6}{7},-2+\frac{2}{7},-\frac{4}{7}\right)=\left(\frac{22}{7},-\frac{12}{7},-\frac{4}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{QP}=P-Q=\left(\frac{22}{7},-\frac{12}{7},-\frac{4}{7}\right)-(1,-1,3)=\left(\frac{22}{7}-\frac{7}{7},-\frac{12}{7}+\frac{7}{7},-\frac{4}{7}-\frac{21}{7}\right)=$$

$$=\left(-\frac{15}{7},\frac{5}{7},-\frac{25}{7}\right)=\frac{5}{7}(-3,1,5)$$

$$|\overrightarrow{QP}|=\frac{5}{7}\sqrt{9+1+25}=\frac{5}{7}\sqrt{35}$$

Avståndet är alltså $\frac{5}{7}\sqrt{35}$

⑤ Då $f(0)=4$, skall $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+ax}-1}{x}=4$. Vi har

$$\frac{\sqrt{1+ax}-1}{x}=\frac{(\sqrt{1+ax}-1)(\sqrt{1+ax}+1)}{x(\sqrt{1+ax}+1)}=\frac{1+ax-1}{x(\sqrt{1+ax}+1)}=a\cdot\frac{1}{\sqrt{1+ax}+1}\to\frac{a}{2},\text{ då } x\to 0$$

Så $\frac{a}{2}=4$, dvs $a=8$

7 Systemets utvidgade matris är

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & b \\ 3 & -1 & a & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & b-2 \\ 0 & -4 & a-3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & b-2 \\ 0 & 0 & a-4 & 1-b \end{bmatrix}$$

Om $a=4$ så är systemet olösbart då $b \neq 1$, medan systemet har oändligt många lösningar för $b=1$. Vi bestämmer dessa.

För $a=4$, $b=1$ får vi systemet

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -4y+z=-1 \end{cases}$$

med z fri, får vi $-4y=-1-z \Leftrightarrow y=\frac{1+z}{4}$ och

$$x=1-y-z=1-\frac{1}{4}-\frac{z}{4}-z=\frac{3}{4}-\frac{5z}{4}=\frac{3-5z}{4}$$

För $a \neq 4$ är systemet entydigt lösbart för alla b. Vi får

$$z=\frac{1-b}{a-4}$$

$$-4y=b-2-1=b-3 \Longrightarrow y=\frac{3-b}{4}$$

$$x=1-y-z=1-\frac{3-b}{4}-\frac{1-b}{a-4}$$

8

$$f(x)=|x+2|e^{-x}=\begin{cases} -(x+2)e^{-x} & \text{för } x<-2 \\ (x+2)e^{-x} & \text{för } x \geq -2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x}+(x+2)e^{-x}=(x+1)e^{-x} & \text{för } x<-2 \\ e^{-x}-(x+2)e^{-x}=-(x+1)e^{-x} & \text{för } x>-2 \end{cases}$$

Teckenschema

x		-2		-1		2	
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	ej def	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Direkt från def av lok. min. följer att f har lok. min $=0$ för $x=-2$ (i själva verket funktionens minsta värde, då ju $f(x) \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$) Teckenschemat visar att f har lok. max $=e$ för $x=-1$ och att det inte finns andra lok. extrempunkter