

## Tentamen MMGF10

Tisdag 15 januari 2007, kl. 08.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

(a) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5x} - 2x).$$

(b) Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkten  $(2, 1)$  och är vinkelrät mot linjen  $2x + 3y = 2$ .

(c) Finn (och förenkla) derivatan av funktionen

$$\ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

(d) För vilka värden på  $h$  saknar ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + hx_2 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

lösning?

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

(a) För något reellt tal  $x$  är  $\frac{x-1}{x^2+3} + \frac{1}{2} < 0$ .

(b) Vektorerna  $\mathbf{u} = (1, 2, 4)$  och  $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$  är ortogonala.

(c) Det finns en funktion  $f$  med  $f'(x) < 0$  för alla  $x > 0$  och  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , medan  $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = \infty$ .

(d) Det finns en  $3 \times 2$ -matris  $A$  sådan att den linjära avbildningen  $T$  given av  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  är ett-till-ett (one-to-one).

(e)  $\arctan(\tan x) = x$  för alla  $x$  för vilka  $\tan x$  är definierad.

(f) Vektorerna  $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (2, 3)$  och  $\mathbf{u}_3 = (3, 4)$  bildar en bas för  $\mathbb{R}^3$ .

3. Är

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ en linjär kombination av } \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}?$$

4. Rita kurvan  $y = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x > 0$ , i stora drag.
5. Beräkna minsta avståndet från punkten  $(1, 0, 4)$  till planet  $x - 5y + z = 1$ .
6. Finn alla primitiva funktioner till

$$\frac{x}{x^2 - 2x + 2}.$$

7. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & -2 & -3 - k \\ -1 & -2 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

Bestäm för alla värden på  $k$  alla lösningar till ekvationen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

8. Man vill dra en rörledning från en punkt A belägen i havet till en punkt B som ligger på den raka strandlinjen. Den punkt C på stranden som ligger närmast A ligger 4 km från A och 10 km från B. Att dra rörledningen till havs kostar 50000 kr/km och motsvarande kostnad på land är 40000 kr/km. För att minimera kostnaden väljer man att dra rörledningen längs en rät linje från A till en punkt D på stranden och sedan från D till B på land. På vilket avstånd från B skall man välja D för att kostnaden skall bli så liten som möjligt?