MMGF10, Lösningar till tentamen 15/1 2008

1. (a) Genom att förlänga med konjugatkvantiteten får vi

$$\sqrt{4x^2+5x}-2x = \frac{(\sqrt{4x^2+5x}-2x)(\sqrt{4x^2+5x}+2x)}{\sqrt{4x^2+5x}+2x} = \frac{4x^2+5x-4x^2}{\sqrt{4x^2+5x}+2x} =$$

$$\frac{5x}{|x|\sqrt{4+5/x^2}+2x} \to \frac{5}{4},$$

då $x \to \infty$.

(b) En normal till linjen $2x+3y=2$ är $\mathbf{n}=(2,3)$ så den sökta linjen har ekvationen $(x,y)=(2,1)+t\mathbf{n}=(2,1)+t(2,3)$, dvs. $x=2+2t$, $y=1+3t$. Vill vi istället ha ekvationen på formen $ax+by=c$, ellimінerar vi t och får $3x-2y=4$.

(c) Enligt kedjeregeln är

$$D\ln\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot D\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{1-x^4}.$$

(d) Genom att radreducera den utvidgade matrisen för systemet finner vi

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & h & 3 \\ 0 & 2+2h & 9 \end{bmatrix}$$

vilket visar att systemet saknar lösning om och endast om $2+2h=0$, dvs $h=-1$.

2. (a) Falskt. Vi har

$$\frac{x-1}{x^2+3}+\frac{1}{2} = \frac{2(x-1)+(x^2+3)}{2(x^2+3)} = \frac{x^2+2x+1}{2(x^2+3)} = \frac{(x+1)^2}{2(x^2+3)} \geq 0$$

för alla x.

(b) Sant. $\mathbf{u}=(1,2,4)$ och $\mathbf{v}=(2,1,-1) \Rightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=2+2-4=0$.

(c) Sant. Om t.ex. $f(x)=x^{-1/2}$ är $f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-3/2}<0$ för alla $x>0$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x} = \infty.$$

(d) Sant. Som bekant är T ett-till-ett $\Leftrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}$. Med t.ex.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ har vi } A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ax_1+bx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1=0,\ x_2=0,\ ax_1+bx_2=0$ oavsett vad a och b är.

(e) Falskt. Enligt definitionen av arctan är $\arctan t$ den vinkel v med $-\pi/2<v<\pi/2$ för vilken $\tan v = t$. Speciellt är $|\arctan t| < \pi/2 < 1.58$ för alla t, medan $\tan x > \sqrt{3} > 1.73$ för $\pi/3 < x < \pi/2$.

(f) Falskt. Vektorerna ligger inte ens i $\mathbf{R}^3$.

3. Vektorn $\mathbf{b}$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ $\Leftrightarrow$ det finns $x_1,\ x_2,\ x_3$ så att $x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3=\mathbf{b}$. Med $A=[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3]$ och $\mathbf{x}=[x_1\ x_2\ x_3]^T$ är detta ekvivalent med att ekvationen $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ är lösbar. Det utvidgade matrisen för detta system är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{bmatrix},$$

vilket visar att systemet inte är lösbart.

4. Vi följer arbetsgången i Persson-Böiers, och startar med att *beräkna derivatan.* Vi finner med $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ att $D_f=]0,+\infty[$ och

$$f'(x)=D\frac{\ln x}{x}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Beräkning av derivatans nollställen: Eftersom ln är strängt växande och $\ln e=1$, är $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$ och $f'(x)>0$ för $0<x<e$ och $f'(x)<0$ för $x>e$, vilket visar att f är strängt växande för $0<x<e$ och strängt avtagande för $x>e$. *Tecken- och värdetabell:* I detta enkla fall är innehållet i en sådan tabell redan klart från raderna ovan. *Beräkning av lämpliga gränsvärden*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty,\qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

Skiss av funktionskurvan: Se Figur 1 i slutet av dokumentet.

5. En normalvektor till planet är $\mathbf{n}=(1,-5,1)$, och $P=(0,0,1)$ är en punkt i planet. Avståndet mellan punkten $Q=(1,0,4)$ och planet är längden av projektionen $\mathbf{u}$ av vektorn $\vec{PQ}=Q-P=(1,0,4)-(0,0,1)=(1,0,3)$ på $\mathbf{n}$. Vi har

$$\mathbf{u}=\frac{\vec{PQ}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}=\frac{4}{27}\mathbf{n},$$

så avståndet är $|\frac{4}{27}\mathbf{n}|=\frac{4}{27}|\mathbf{n}|=\frac{4}{27}\sqrt{27}=\frac{4}{\sqrt{27}}$.

6. Vi har $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$, så

$$\int\frac{x}{x^2+2x+2}\,dx=\int\frac{x}{(x-1)^2+1}\,dx=\left[\begin{array}{ccccc} x & - & 1 & = & t \\ x & = & t & + & 1 \\ dx & = & dt & & \end{array}\right]=\int\frac{t+1}{t^2+1}\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt+\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\arctan t+C=\frac{1}{2}\ln((x-1)^2+1)+\arctan(x-1)+C.$$

7. Vi radreducerar den utvidgade koefficientmatrisen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -3-k & 0 \\ -1 & -2 & 1 & k & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7-k & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k-5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k-5 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sista ekvationen är $(k-3)x_4 = 0$, så om $k \neq 3$ följer $x_4 = 0$. Andra ekvationen är $-x_3 + (k-5)x_4 = 0$, vilket då $x_4 = 0$ medför att $x_3 = 0$. Första ekvationen är $x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0$, vilket ger $x_1 + 2x_2 = 0$, dvs. $x_1 = -2x_2$, då ju $x_3 = x_4 = 0$. För $k \neq 3$ har systemet således lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Om $k = 3$ är x_4 fri och andra ekvationen är $-x_3 + 2x_4 = 0$, så $x_3 = -x_4$. Vidare kan x_2 väljas som fri, och från första ekvationen följer $x_1 = 2x_3 + 5x_4 - 2x_2 = x_4 - 2x_2$ så

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Låt x vara avståndet från C till D så att $10 - x$ är avståndet från D till B. Om vi söker lägsta kostnad, måste givetvis D ligga mellan C och B, så att $0 \leq x \leq 10$. (Rita en figur, om Du känner Dig osäker på hur det ser ut). Kostnaden att dra rörledningen först i havet från A till D och sedan på land från D till B blir då

$$K(x) = \sqrt{4^2 + x^2} \cdot 50 \cdot 10^3 + (10 - x) \cdot 40 \cdot 10^3 = 10^4[5(16 + x^2)^{1/2} + 4(10 - x)].$$

Härav följer

$$K'(x) = 10^4[5 \cdot \frac{1}{2}(16 + x^2)^{-1/2} \cdot 2x - 4] = 10^4 \left[\frac{5x}{\sqrt{16 + x^2}} - 4 \right] = 0 \Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{16 + x^2}.$$

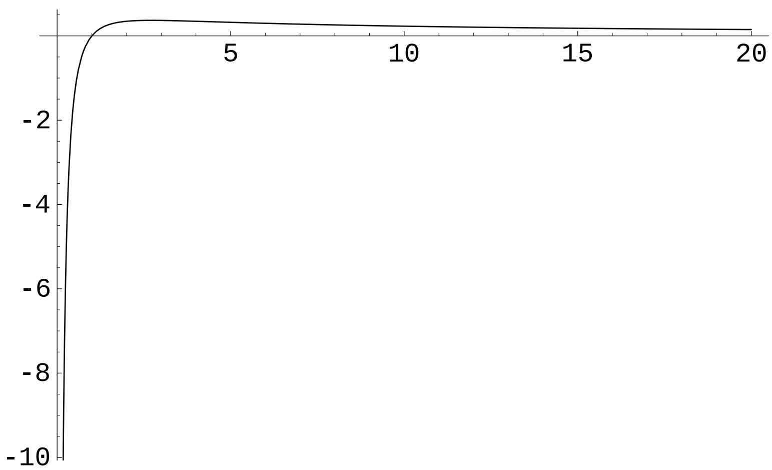
Genom att kvadrera båda led, får vi efter lite förenkling ekvationen $x^2 = \frac{256}{9}$ med lösning $x = \pm\frac{16}{3}$, där ju endast den positiva roten är relevant. Funktionen K är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[0, 10]$ och har därför ett minsta värde. Den punkt som ger minsta värdet finns att söka bland intervallets ändpunkter och punkter där derivatan är 0, dvs. bland talen 0, 16/3 och 10. Vi har

$$K(0) = 10^4[5 \cdot \sqrt{16} + 4 \cdot 10] = 10^4(20 + 40) = 60 \cdot 10^4,$$

$$K(16/3) = 10^4[5 \cdot \sqrt{16 + (16/3)^2} + 4 \cdot (10 - 16/3)] = 10^4 \frac{156}{3} = 52 \cdot 10^4,$$

$$K(10) = 10^4[5 \cdot \sqrt{16 + 100}] = 10^4 \cdot 5 \cdot \sqrt{116} \approx 53.85.$$

Minsta värde får man då $x = 16/3$ så vi skall alltså placera D på avståndet $10 - 16/3 = 14/3$ från B.



Figur 1: Kurvan i uppgift 4.