

Tentamen MMGF11

Måndag 11 januari 2010, kl. 08.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

(a) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}).$$

(b) Bestäm arean av triangeln med hörnen $(1, -1, 1)$, $(2, 1, 3)$ och $(0, 1, 2)$.

(c) Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = (1 + x^2)^x$.

(d) Vektorerna $(1, -1, 1)$ och $(1, 2, 5)$ spänner upp ett plan som innehåller origo. Ange planets ekvation på normalform.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

(a) Om polynomet $p(x)$ uppfyller $(p''(x))^3 = p(x)$ för alla reella x , så är alla dess koefficienter 0.

(b) Det finns ekvationssystem med 2 ekvationer och 3 obekanta utan lösning.

(c) Om $5\pi \leq x \leq 6\pi$, så är $\arccos(\cos x) = 6\pi - x$.

(d) Det finns 2×2 -matriser A och B med $A \neq 0$ och $B \neq 0$ men sådana att $AB = 0$.

(e) Antag att A är en 3×3 -matris och $\mathbf{y}$ är en vektor i $\mathbb{R}^3$ sådan att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ saknar lösning. Då finns det en vektor $\mathbf{z}$ i $\mathbb{R}^3$ sådan att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ har en entydigt bestämd lösning.

(f) Funktionen f definierad genom $f(x) = |x|^3$ är deriverbar för alla x .

3. Är vektorn

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

en linjärkombination av vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}?$$

4. Rita kurvan

$$y = \frac{x}{1+x} e^{-x}$$

i stora drag.

5. Bestäm minsta avståndet från punkten $(1, 0, 4)$ till planet som går genom punkten $(1, -3, 1)$ och innehåller vektorerna $(1, 5, -2)$ och $(-1, 2, -1)$.
6. Visa att funktionen f , definierad genom $f(x) = x^5 - 10x^3 + 45x + 1$, har en invers f^{-1} och beräkna $(Df^{-1})(1)$.
7. För vilka värden på konstanterna a och b har ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x & +3y & +2z & = & -8 \\ x & & -z & = & 2 \\ 3x & +3y & +az & = & b \end{cases}$$

någon lösning? Lös systemet för dessa värden.

8. Bestäm eventuella största och minsta värde av funktionen f , definierad för alla x genom

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}.$$