Matematik
Göteborgs universitet
R. Andersson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare är tillåten
Telefonvakt: Oskar Hamlet
tel 0703 - 088304

Tentamen MMGF11

Måndag 11 januari 2010, kl. 08.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Beräkna
   $$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}).$$

   (b) Bestäm arean av triangeln med hörnen $(1,-1,1)$, $(2,1,3)$ och $(0,1,2)$.

   (c) Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = (1+x^2)^x$.

   (d) Vektorerna $(1,-1,1)$ och $(1,2,5)$ spänner upp ett plan som innehåller origo. Ange planets ekvation på normalform.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Om polynomet $p(x)$ uppfyller $(p''(x))^3 = p(x)$ för alla reella x, så är alla dess koefficienter 0.

   (b) Det finns ekvationssystem med 2 ekvationer och 3 obekanta utan lösning.

   (c) Om $5\pi \le x \le 6\pi$, så är $\arccos(\cos x) = 6\pi - x$.

   (d) Det finns 2×2-matriser A och B med $A \neq 0$ och $B \neq 0$ men sådana att $AB = 0$.

   (e) Antag att A är en 3×3-matris och $\mathbf{y}$ är en vektor i $\mathbb{R}^3$ sådan att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ saknar lösning. Då finns det en vektor $\mathbf{z}$ i $\mathbb{R}^3$ sådan att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ har en entydigt bestämd lösning.

   (f) Funktionen f definierad genom $f(x) = |x|^3$ är deriverbar för alla x.

3. Är vektorn
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$
en linjärkombination av vektorerna
$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}?$$

4. Rita kurvan
$$y = \frac{x}{1+x}e^{-x}$$
i stora drag.

5. Bestäm minsta avståndet från punkten $(1, 0, 4)$ till planet som går genom punkten $(1, -3, 1)$ och innehåller vektorerna $(1, 5, -2)$ och $(-1, 2, -1)$.

6. Visa att funktionen f, definierad genom $f(x) = x^5 - 10x^3 + 45x + 1$, har en invers f^{-1} och beräkna $(Df^{-1})(1)$.

7. För vilka värden på konstanterna a och b har ekvationssystemet
$$\begin{cases} -x & +3y & +2z & = & -8 \\ x & & -z & = & 2 \\ 3x & +3y & +az & = & b \end{cases}$$
någon lösning? Lös systemet för dessa värden.

8. Bestäm eventuella största och minsta värde av funktionen f, definierad för alla x genom
$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}.$$

Lösning till tentamensskrivning för MMGF11,
Måndag 11 januari 2010.

1

(a) Av konjugatregeln följer

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{(x+2)-(x-2)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$$

så

$$\sqrt{x}\,(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})=\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\longrightarrow\frac{4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{4}{2}=2,\text{ då } x\to+\infty$$

(b) Triangeln är uppspänd av vektorerna

$$u=(1,-1,1)-(0,1,2)=(1,-2,-1),\quad v=(2,1,3)-(0,1,2)=(2,0,1)$$

så arean är $A=\frac{1}{2}|u\times v|$. Vi har

$$u\times v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=e_1(-2-0)-e_2(1+2)+e_3(0+4)=-2e_1-3e_2+4e_3=(-2,-3,4)$$

så $|u\times v|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$ och $A=\frac{\sqrt{29}}{2}$

(c) Från omskrivningen

$$(1+x^2)^x=e^{x\ln(1+x^2)}$$

och då

$$D(x\ln(1+x^2))=1\cdot\ln(1+x^2)+x\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}$$

följer

$$D(1+x^2)^x=D(e^{x\ln(1+x^2)})=e^{x\ln(1+x^2)}\cdot D(x\ln(1+x^2))=e^{x\ln(1+x^2)}\left[\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right]$$

vilket, om vi använder omskrivningen ovan i motsatt riktning, kan skrivas

$$(1+x^2)^x\left[\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right]=(1+x^2)^x\ln(1+x^2)+2x^2(1+x^2)^{x-1}=$$

$$=(1+x^2)^{x-1}\left[(1+x^2)\ln(1+x^2)+2x^2\right]$$

(d) Med $u=(1,-1,1)$ och $v=(1,2,5)$ är

$$n=u\times v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}=e_1(-5-2)-e_2(5-1)+e_3(2+1)=-7e_1-4e_2+3e_3$$

en normal till planet genom origo så dess ekvation är $-7x-4y+3z=0$

(a) Antag att polynomet $p(x)$ har gradtal n. Då har $p''(x)$ gradtal $n-2$. och $(p(x))^3$ gradtal $3(n-2)=3n-6$. Om nu $(p''(x))^3 = p(x)$ så måste

$3n-6=n \iff 2n=6 \iff n=3$.

Enda polynom som kan uppfylla likheten måste därför ha grad 3. Ett sådant polynom kan skrivas

$p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

med $a \neq 0$, vilket ger $p'(x) = 3ax^2+2bx+c$ och $p''(x) = 6ax+2b$.

Sätter vi in detta i likheten, finner vi

$(6ax+2b)^3 = ax^3+bx^2+cx+d \iff$

$6^3a^3x^3 + 3\cdot 6^2a^2x^2\cdot 2b + 3\cdot 6ax\cdot 2^2b^2 + 2^3b^3 = ax^3+bx^2+cx+d \iff$

$(6^3a^3-a)x^3 + (6^3a^2b-b)x^2 + (3\cdot 4\cdot 6ab^2-c)x + (8b^3-d) = 0$

Då detta skall gälla för alla x måste

$a(6^3a^2-1)=0$ (1)

$b(6^3a^2-1)=0$ (2)

$c = 72ab^2$ (3)

$d = 8b^3$ (4)

Med $6^3a^2-1=0 \iff a^2 = \frac{1}{6^3}$ blir första ekvationen uppfylld och även andra ekvationen, oavsett vad b är. För varje val av $b \neq 0$ är då alla polynomets koefficienter nollskilda, och det är enkelt att se att varje polynom vars koefficienter uppfyller (1)–(4) även uppfyller likheten. Påståendet i uppgiften är således falskt.

(b) Sant. Låt A vara en 2×3-matris och $\mathbb{b}$ en 2-vektor. Enligt t.ex. Sats 4 i kap. är ekvationen $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ lösbar för varje $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^2 \iff$ kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^2$, så allt vi behöver göra är att finna en matris A vars kolonner inte spänner upp $\mathbb{R}^2$. Välj t.ex.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Anm. Det är naturligtvis oerhört enkelt att direkt skriva upp ett system utan lösning.

(c) Från definitionen av arccos följer att $\arccos(\cos x)$ är den vinkel v med $0 \le v \le \pi$ för vilken $\cos v = \cos x$. Om $5\pi \le x \le 6\pi$ har vi $0 \le 6\pi - x \le \pi$ och

$$\cos(6\pi - x) = \cos 6\pi \cos x - \sin 6\pi \sin x = \cos x = \cos v, \text{ så } v = 6\pi - 6.$$

Påståendet är därför sant.

(d) Sant. Tag t.ex.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Så är $A \ne 0$, $B \ne 0$ men

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

(e) Finns det en vektor $\mathbf{z}$ s.a. ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ har en entydigt bestämd lösning, så låt $\mathbf{x}_3$ vara den lösning. Om den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = 0$ har lösningen $\mathbf{x}_1$ så är $A\mathbf{x}_1 = 0$ och

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_3 = 0 + \mathbf{z} = \mathbf{z},$$

dvs $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$ är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ och om dess lösning är entydigt bestämd, måste $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3 \Rightarrow \mathbf{x}_1 = 0$. Detta visar att den homogena ekvationen har enbart den triviala lösningen

Men då A är kvadratisk, måste A vara inverterbar och då har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ en (entydigt bestämd) lösning för varje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$

Påståendet är därför falskt.

(f) Det är klart att f är deriverbar för alla $x \ne 0$, så det räcker att undersöka om f är deriverbar i $x = 0$. Vi har för $h > 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|^3 - 0}{h} = \frac{h^3}{h} = h^2 \to 0, \text{ då } h \to 0^+$$

medan för $h < 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|^3 - 0}{h} = \frac{-h^3 - 0}{h} = -h^2 \to 0, \text{ då } h \to 0^-$$

Det visar att f är deriverbar för $x = 0$ med $f'(0) = 0$. så påståendet är sant

③ Vektorn $\mathbb{b} = \begin{bmatrix}15\\5\\-9\end{bmatrix}$ är en linjärkombination av vektorerna

$u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix}-2\\3\\-2\end{bmatrix}$ $u_3 = \begin{bmatrix}-6\\7\\5\end{bmatrix}$ $\Longleftrightarrow$ ekvationssystemet vars utvidgade matris är

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -6 & 15\\ 0 & 3 & 7 & 5\\ 1 & -2 & 5 & -9\end{bmatrix}$$

är lösbar. Genom radreducering finner vi

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -6 & 15\\ 0 & 3 & 7 & 5\\ 1 & -2 & 5 & -9\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & -6 & 15\\ 0 & 3 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 11 & -24\end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 15\\ \quad 3x_2 + 7x_3 = 5\\ \qquad 11x_3 = -24\end{cases}$$

Vi ser omedelbart att detta ekvationssystem är (entydigt) lösbart, så $\mathbb{b}$ är en linjärkombination av u_1, u_2 och u_3.

④ Vi följer beräkningsgången i Böijers-Persson.

1. Beräkna derivatan. Med $f(x) = \frac{x}{1+x}e^{-x}$ får vi

$$f'(x) = D\left(\frac{x}{1+x}\right)\cdot e^{-x} + \frac{x}{1+x}D(e^{-x}) = \frac{1\cdot(1+x)-x\cdot 1}{(1+x)^2}\cdot e^{-x} - \frac{x}{1+x}\cdot e^{-x} =$$

$$= \left(\frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{x}{1+x}\right)e^{-x} = \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{x(1+x)}{(1+x)^2}\right)e^{-x} = \frac{1-x-x^2}{(1+x)^2}e^{-x} = -\frac{x^2+x-1}{(1+x)^2}e^{-x}$$

Då $x^2+x-1=0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, dvs $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

är $x^2+x-1 = (x-x_1)(x-x_2)$ så

$$f'(x) = -\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(1+x)^2}e^{-x}$$

2. Undersök hur derivatans tecken varierar. Då $e^{-x} > 0$ är $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow$ $x = x_1$ eller $x = x_2$.

3. Upprätta teckenschema och värdetabell.

x		x_1		-1		x_2	
$x-x_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-x_2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	odef	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	odef	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$

(4) (forts) Från teckenschemat följer att f är strängt avtagande för $x < x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, är strängt växande för $x_1 < x < -1$ och $-1 < x < x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ samt strängt avtagande för $x > x_2$. Därför har f strängt lokalt minimum $f(x_1)$ för x_1 och strängt lokalt maximum $f(x_2)$ för $x = x_2$. Vidare är

$$f(x_1) = \frac{x_1}{1+x_1} e^{-x_1} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} e^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = -\frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} e^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{(1+\sqrt{5})^2}{1-5} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx$$

$$f(x_2) = \frac{x_2}{1+x_2} e^{-x_2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} e^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

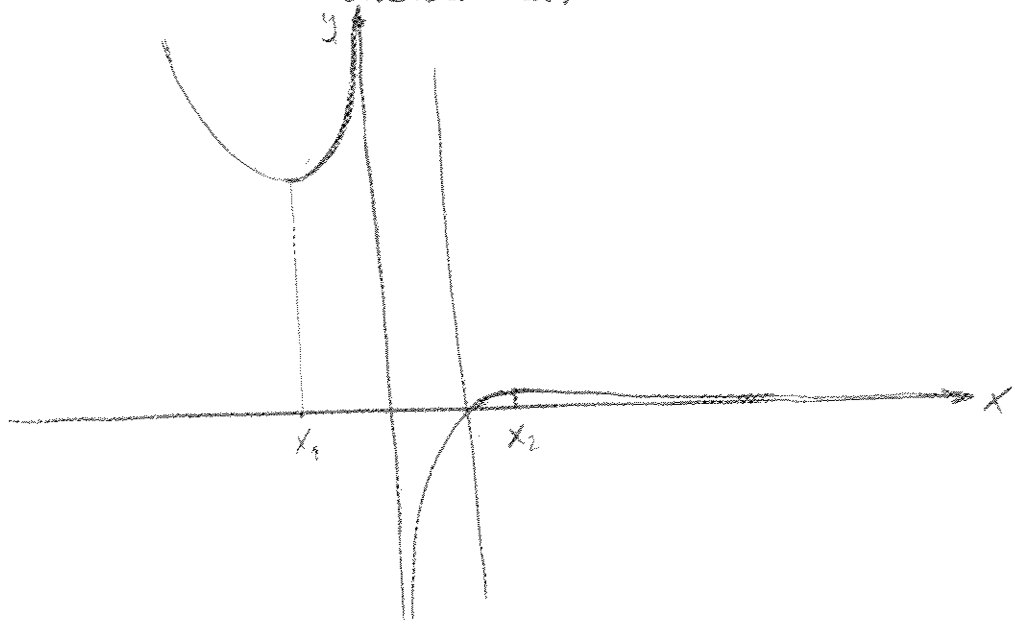
4. Komplettera med vissa gränsvärdesberäkningar

De gränsvärden som behöver beräknas är $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ och $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ samt $\lim_{x \to -1^+} f(x)$. Vi har

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+x} e^{-x} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{\overset{<0}{x}}{\underset{<0}{1+x}} = +\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{1+x} e^{-x} = -\infty$$

5. Gör en skiss av funktionskurvan



5. En normalvektor till planet är med $u = (1,5,-2)$, $v = (-1,2,-1)$

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = e_1(-5+4) - e_2(-1-2) + e_3(2+5) = -e_1 + 3e_2 + 7e_3 = (-1,3,7)$$

Om $P_0 = (1,-3,1)$ är punkten som planet går genom och $P = (1,0,4)$ är punkten, vars avstånd till planet vi söker, och $w = \overrightarrow{P_0P}$ är det sökta avståndet längden av projektionen av w på n. Då

$w = \overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (1,0,4) - (1,-3,1) = (0,3,3)$ är

$$w_n = \frac{w \cdot n}{n \cdot n} \cdot n = \frac{(0,3,3)\cdot(-1,3,7)}{(-1,3,7)\cdot(-1,3,7)}(-1,3,7) = \frac{30}{59}(-1,3,7)$$

så det sökta avståndet är $\frac{30}{59}\|(-1,3,7)\| = \frac{30}{59}\sqrt{59} = \frac{30}{\sqrt{59}}$

6. Med

$f(x) = x^5 - 10x^3 + 45x + 1$

är

$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 45 = 5(x^4 - 6x^2 + 9) = 5\cdot(x^2-3)^2 > 0$

för alla x med $x^2 \neq 3$. Därför är f strängt växande och därför inverterbar. Då $f(0) = 1$ är

$$(Df^{-1})(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{45}$$

7. Den utvidgade matris som hör till systemet är

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 12 & a+6 & b-24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & a+2 & b \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -8 \\ 3x_2 - x_3 &= -6 \\ (a+2)x_3 &= b \end{aligned}$$

Om $a+2 \neq 0$ innehåller trappstegsformen ovan till höger ingen rad av formen $[0\ 0 \ldots 0\ c]$ med $c \neq 0$ och då är systemet lösbart. Samma sak om $a+2=0$ med $b=0$. Systemet är därför lösbart $\Longleftrightarrow$ $a \neq -2$ eller $a = -2$ och $b = 0$. För $a \neq -2$ får vi $x_3 = \frac{b}{a+2}$, vilket ger $x_2 = \frac{b-6a-12}{3(a+2)}$ och $x_1 = \frac{2a+3b+4}{a+2}$. Är däremot $a = -2$ och $b = 0$ blir rad 3 i den utvidgade matrisen $0\ 0\ 0\ 0$. Vi kan välja x_3 som fri och får $x_2 = \frac{x_3}{3} - 2$ och $x_1 = 3x_3 + 2$.

8 Med

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

ser vi att f är jämn, dvs $f(-x) = f(x)$, så det räcker att undersöka funktionen för $x \geq 0$. Vi har $f(0) = 0$ och $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (standardgränsvärde efter substitutionen $t = x^2+1$). Vidare är

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \cdot (x^2+1) - \ln(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 2x \cdot \frac{1-\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = 0 \iff$$

$x = 0$ eller $\ln(x^2+1) = 1$, dvs. $x = 0$ eller $x^2+1 = e$, dvs $x = 0$ eller $x = \sqrt{e-1}$ (då ju $x \geq 0$). För $x \geq 0$ får vi följande teckenschema för f' och f:

x	0		$\sqrt{e-1}$	
$2x$	0	$+$	$+$	$+$
$1-\ln(x^2+1)$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

Från teckenschemat, och det faktum att funktionen är jämn, följer att funktionens största värde är $\frac{1}{e}$, som antas för $x = \pm\sqrt{e-1}$ och dess minsta värde är 0, som antas för $x = 0$.