Matematik
Göteborgs universitet
R. Andersson

Hjälpmedel (Facilities): Chalmersgodkänd räknare är tillåten
(Chalmers approved calculator is permitted)
Telefonvakt: Adam Andersson
tel 0703 - 088304

Tentamen MMGF11

Lördag 8 januari 2011, kl. 08.30-12.30

If nothing indicating the contrary is stated, complete solutions to each problem, including computations, possible references to theorems and statements of reasons shall be provided. Each problem gives maximum 3 points except the first, which gives maximum 4 points.

1. For this problem, you shall only provide answer. (One point per subproblem.)

   The points $P_1 = (0,1,2)$, $P_2 = (1,2,3)$ and $P_3 = (1,1,3)$ are given.

   (a) Determine the equation for the plane through P_1, P_2 and P_3 in normal form.

   (b) Find the area of the triangle with vertices P_1, P_2 and P_3.

   (c) Determine
   $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}).$$

   (d) Determine $f'(x)$ when $f(x) = \sin(\ln x)$.

2. Below six statements are given. Determine for each of them if it is true or false. Correct answer gives 0,5 points, wrong answer -0,5 points and no answer 0 points. You cannot receive less than 0 points for the entire problem.

   (a)
   $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$$

   (b) If $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$ are solutions of the matrix equation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ then $2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ is also a solution.

   (c)
   $$\arcsin(\sin\frac{3\pi}{5}) = \frac{3\pi}{5}.$$

   (d) There exist a 2×4-matrix A and a matrix B such that $AB = I_2$ where I_2 is the identity matrix with 2 rows and 2 columns.

   (e) Let the function f be defined for all real numbers, be differentiable, and with a continuous derivative f'. If f is even, then f' is odd.

   (f) Assume that $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ and $\mathbf{e}_3$ are linear independent vectors in $\mathbb{R}^3$ and that A is an invertible 3×3-matrix. Then $A\mathbf{e}_1$, $A\mathbf{e}_2$ and $A\mathbf{e}_3$ are linear independent too.

3. Construct the curve
   $$y = \frac{\ln x}{x^2}$$

VÄND

4. Find the point Q in the plane $x + y + 2z = 2$ closest to the point $P = (5, -1, 5)$.

5. Determine all tangent lines to the curve $y = \arcsin(\sqrt{x})$ that are parallel to the line $y = x - 1$.

6. Determine for all values of a the number of solutions to the linear system

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & (2a+3)z & = & 3 \\ x & + & (a+1)y & + & (2a+3)z & = & 3 \end{array}\right. .$$

7. Show that the function f, defined for $0 \leq x < \infty$ by $f(x) = x^3 e^{-x}$, has a global maximum, and find it.

8. The linear transformation T maps

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \text{ into } \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \text{ into } \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \text{ into } \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Find the standard matrix for T.

Lösningar till Tentamen HMGF11, Lördag 8 januari 2011.

1.

(a) $\mathbb{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1,2,3)-(0,1,2) = (1,1,1)$

$\mathbb{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (1,1,3)-(0,1,2) = (1,0,1)$

$$\mathbb{v}_1 \times \mathbb{v}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e_1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + e_3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = e_1(1) - e_2(0) + e_3(-1) =$$

$= (1,0,-1)$; $\mathbb{n} = (1,0,-1)$ $P_1 = (0,1,2)$, $P = (x,y,z)$ $\overrightarrow{P_1P} = P - P_1 = (x,y,z)-(0,1,2) = (x, y-1, z-2)$

$\overrightarrow{P_1P}\cdot\mathbb{n} = 0 \iff (1,0,-1)\cdot(x,y-1,z-2) = 0 \iff$

$\iff x - 0(y-1) - 1(z-2) = 0 \iff x - z + 2 = 0$

(b) $A = \dfrac{|\mathbb{v}_1 \times \mathbb{v}_2|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1} = \frac{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1})} = \frac{(x^2+x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x(1-\frac{1}{x})}{|x|(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})} = \frac{x}{|x|}\cdot\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

För $x>0$ är $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$ och därför är

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

För $x<0$ är $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$ och därför är

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}) = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

Detta visar att 2(a) är falskt.

(d) Enligt kedjeregeln är

$f'(x) = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

2.

(b) Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ så är $A\mathbf{x}_1=\mathbf{b}$ och $A\mathbf{x}_2=\mathbf{b}$ så

$$A(2\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=2A\mathbf{x}_1-A\mathbf{x}_2=2\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{b}$$

och påståendet sant.

(c) Enligt definitionen av arcsin är $\arcsin(\sin\frac{3\pi}{5})$ den vinkel v med $-\frac{\pi}{2}\le v\le\frac{\pi}{2}$ för vilken $\sin v=\sin\frac{3\pi}{5}$.
Eftersom $\frac{3\pi}{5}>\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, så $\arcsin(\sin\frac{3\pi}{5})\neq\frac{3\pi}{5}$ och påståendet falskt. Då $\frac{3\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}=\frac{5\pi}{5}=\pi$ är $\frac{2\pi}{5}=\pi-\frac{3\pi}{5}$ och

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\pi\cos\frac{3\pi}{5}-\cos\pi\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}.$$

Då $\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ är $\arcsin(\sin\frac{3\pi}{5})=\frac{2\pi}{5}$

(d) Sant. Om A är en 2×4-matris måste B vara en $4\times p$-matris för att produkten AB skall vara definierad. Resultatet blir då en $2\times p$-matris. Skall detta vara lika med I_2, måste $p=2$, så B måste vara en 4×2-matris. Om nu

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\end{bmatrix}$$

med $a_{11}\cdot a_{24}\neq 0$ och

$$B=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{24}}\end{bmatrix}$$

har vi

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{24}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

(e) Enligt kedjeregeln är

$$Df(-x)=f'(-x)\cdot(-1)=-f'(-x)$$

Men då f är jämn, är $f(-x)=f(x)$ så

$-f'(-x)=Df(-x)=Df(x)=f'(x)\Longrightarrow f'(-x)=-f(x)$ och påståendet sant.

(4) Då A är inverterbar medför $A\mathbf{x} = 0$ att $\mathbf{x} = 0$. Nu är ③

$$\lambda_1 A\mathbf{e}_1 + \lambda_2 A\mathbf{e}_2 + \lambda_3 A\mathbf{e}_3 = A(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3).$$

Så om $\lambda_1 A\mathbf{e}_1 + \lambda_2 A\mathbf{e}_2 + \lambda_3 A\mathbf{e}_3 = 0$ är $A(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3) = 0$ vilket medför att $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = 0$. Men då $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ är linjärt oberoende följer $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, vilket visar att

$\{A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_3\}$

är linjärt oberoende, och påståendet sant

(3) Vi följer upplägget i Persson - Böiers.

1. Beräkna derivatan. För $x > 0$ är

$$f'(x) = D\,\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \iff \ln x = \tfrac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

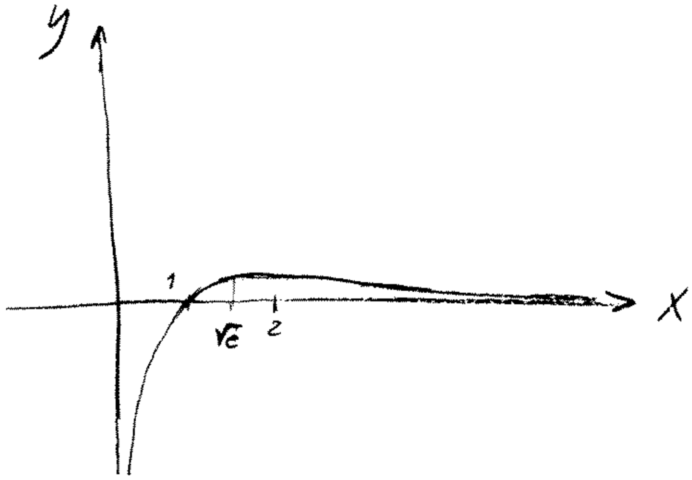
Då $\ln$ är strängt växande är $f'(x) > 0$ för $0 < x < \sqrt{e}$ och $f'(x) < 0$ för $x > \sqrt{e}$ så f är strängt växande i $]0, \sqrt{e}[$ och strängt avtagande i $]\sqrt{e}, +\infty[$ vilket visar att f har strängt lokalt maximum (ja t.o.m. största värde) för $x = \sqrt{e}$.

Har $f(\sqrt{e}) = \dfrac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{(e^{\frac{1}{2}})^2} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln e}{e^1} = \dfrac{1}{2e}$

Därmed har vi klarat av punkterna 2 och 3.

4. Då $\ln x \to -\infty$, då $x \to 0^+$ följer $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Vidare är

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ (standardgränsvärde)}$$



4. En normal till planet är $n=(1,1,2)$. Linjen genom P med n som riktningsvektor har ekvationen $R=P+tn$. Med $R=(x,y,z)$ och $P=(5,-1,5)$ får vi

$(x,y,z)=(5,-1,5)+t(1,1,2)=(5+t,-1+t,5+2t)$.

Punkten R ligger i planet $\Leftrightarrow$ den uppfyller planets ekvation $\Leftrightarrow$

$(5+t)+(-1+t)+2(5+2t)=2 \Leftrightarrow 5+t-1+t+10+4t=2 \Leftrightarrow$
$12+6t=0 \Leftrightarrow t=-2$

För detta t är $R=(5,-1,5)-2(1,1,2)=(5,-1,5)-(2,2,4)=$
$=(3,-3,1)$
vilket är den punkt i planet som ligger närmast P.

5. Linjens riktningskoefficient är 1, så tangenten till kurvan $y=f(x)=\arcsin(\sqrt{x})$ för $x>0$ är parallell med linjen $\Leftrightarrow f'(x)=1$. Vi har enligt kedjeregeln

$$f'(x)=D\arcsin(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}D(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot D(x^{\frac{1}{2}})=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

så $f'(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{1-x}=1 \Rightarrow 4x(1-x)=1 \Leftrightarrow$
$x-x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

Vid kvadreringen tappar vi ekvivalens, så vi behöver pröva om $x=\frac{1}{2}$ är en lösning. För $x=\frac{1}{2}$ är

$2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

så $x=\frac{1}{2}$ är den enda lösningen. Tangentens ekvation blir

$y-f(\frac{1}{2})=f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow y-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}})=1\cdot(x-\frac{1}{2})=x-\frac{1}{2}$, dvs
$y=x+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}=x+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

6. Den utvidgade matrisen för systemet är

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 2 & 2a+3 & 3 \\ 1 & a+1 & 2a+3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 2 & 2a+3 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 2 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Om $a=1$ blir utvidgade matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \quad -x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Med x_3 fri får vi $x_2 = 2-3x_3$ och $x_1 = -1+x_3$, så i detta fall har ekvationssystemet oändligt många lösningar.

Om $a \neq 1$ kan vi dividera tredje raden i den utvidgade matrisen med $a-1$, vilket ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \quad + (a+1)x_3 = 1 \\ x_2 \quad = 0 \\ (a+2)x_3 = 2 \end{cases}$$

Om $a=-2$ innehåller den utvidgade matrisen en rad av formen $[0\ 0\ 0\ 2]$ och då saknar systemet lösning.

För $a \neq 1$, $a \neq -2$ har ekvationssystemet den entydigt bestämda lösningen

$$x_3 = \frac{2}{a+2}, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1-(a+1)x_3 = 1 - \frac{2(a+1)}{a+2}$$

Svar: Oändligt många lösningar för $a=1$, ingen lösning för $a=-2$ och exakt en lösning för $a \neq 1$, $a=-2$.

(7) Vi har med $f(x)=x^3e^{-x}$ för $0\leq x<\infty$

$f'(x)=3x^2\cdot e^{-x}+x^3\cdot e^{-x}\cdot(-1)=x^2e^{-x}(3-x)$

Här är $x^2e^{-x}>0$ för alla $x\neq 0$ så $f'(x)>0$ för $0<x<3$, $f'(3)=0$ och $f'(x)<0$ för $x>3$. Så f är strängt växande i intervallet $]0,3[$ och strängt avtagande i intervallet $x>3$.

Detta visar att f har sitt största värde i $]0,+\infty[$ för $x=3$ och detta värde är $f(3)=3^3e^{-3}=\frac{27}{e^3}>0=f(0)$ vilket därför är funktionens största värde i $[0,+\infty[$

(8) Som bekant är standardmatrisen för den linjära transformationen $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ matrisen $A=[T(e_1)\ T(e_2)\ T(e_3)]$ där

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\quad e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

Låt

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad u_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\quad u_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Vi har

$$e_1=u_1-u_3\qquad e_2=u_2+u_3-u_1\qquad e_3=u_1-u_2$$

så

$$T(e_1)=T(u_1)-T(u_3)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$T(e_2)=T(u_2)+T(u_3)-T(u_1)=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$T(e_3)=T(u_1)-T(u_2)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Därför är

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}.$$