

Tentamen MMGF10

Fredag 2 november 2007, kl. 08.30-13.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

- (a) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}.$$

- (b) Bestäm $f'(x)$ för alla reella x då $f(x) = \ln(1 + 4x^2)$.

- (c) Finn alla enhetsvektorer (dvs. vektorer av längd 1) som är vinkelräta mot vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(-2, 0, 3)$.

- (d) Bestäm arean av triangeln med hörnen $(0, 1, 1)$, $(-1, -1, 3)$ och $(4, 0, 1)$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

- (a) Om polynomet $p(x)$ uppfyller $(p'(x))^2 = p(x)$ för alla reella x , så är alla dess koefficienter 0.

- (b)

$$-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{1 + 1/\sqrt{2}} \right| = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

- (c) Om $\pi \leq x \leq 2\pi$ så är $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$.

- (d) Ortogonal projektionen av vektorn $\mathbf{v} = (5, 1, 1)$ på vektorn $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ är $(2, 4, 4)$.

- (e) Linjerna $(x, y, z) = (0, 1, 1) + s(1, -1, 2)$ och $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + t(-1, -1, 0)$ skär varandra.

- (f) Standardmatrisen för vridning i planet vinkeln $\frac{\pi}{2}$ moturs är

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Avgör om vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är linjärt beroende eller linjärt oberoende.

4. Finn alla primitiva funktioner till $x^2 e^x$.
5. Beräkna avståndet från punkten $(0, -1, 1)$ till planet som går genom punkten $(2, -3, 2)$ och innehåller vektorerna $(2, 7, -3)$ och $(-1, 4, -1)$.
6. Rita kurvan $y = (2 - \frac{1}{x})e^{-x}$ i stora drag.
7. För vilka värden på parametern k har nedanstående ekvationssystem andra lösningar än den triviala $x_1 = x_2 = x_3 = 0$? Lös systemet för detta k !

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2kx_3 = 0 \end{cases}$$

8. Bestäm det kortaste avståndet mellan kurvan $y = e^x$ och linjen $y = 2x$.