MMGF10, Lösningar till tentamen 2/11 2007

1. (a) Genom att förlänga med täljarens konjugatkvantitet får vi

$$\frac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \frac{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}{x(2+\sqrt{4-x})} = \frac{4-(4-x)}{x(2+\sqrt{4-x})} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x}} \to \frac{1}{4},$$

då $x \to 0$.

(b) Med hjälp av kedjeregeln finner vi att

$$f'(x) = \frac{1}{1+4x^2} D(1+4x^2) = \frac{8x}{1+4x^2}.$$

(c) En vektor som är vinkelrät mot vektorerna $\mathbf{u} = (1,2,3)$ och $\mathbf{v} = (-2,0,3)$är

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6-0, -(3+6), 0+4) = (6,-9,-4).$$

Dess längd är $\sqrt{6^2+(-9)^2+4^2} = \sqrt{133}$. Enhetsvektorerna vinkelräta mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är därför $\pm\frac{1}{\sqrt{133}}(6,-9,4)$.

(d) Om $\mathbf{u} = (-1,-1,3)-(0,1,1) = (-1,-2,2)$ och $\mathbf{v} = (4,0,1)-(0,1,1) = (4,-1,0)$ så är den sökta arean hälften av $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$. Vi har

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0+2, -(0-8), 1+8) = (2,8,9).$$

Så $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = \sqrt{2^2+8^2+9^2} = \sqrt{149}$ och arean är $\frac{\sqrt{149}}{2}$.

2. (a) Falskt. Om $grad(p(x)) = n$ är $grad(p'(x)) = n-1$, så om $(p'(x))^2 = p(x)$ är $2(n-1) = n$, dvs $2n-2 = n$, så $n = 2$. Därför är $p(x) = ax^2+bx+c$, vilket ger $p'(x) = 2ax+b$ och $(p'(x))^2 = (2ax+b)^2 = 4a^2x^2+4abx+b^2$.Därför måste $4a^2 = a$, $4ab = b$, $b^2 = c$. Första ekvationen är ekvivalent med att $a = 0$ eller $a = \frac{1}{4}$. För den senare lösningen blir andra ekvationen $b = b$, som ju är uppfyllt för alla b. Förutom polynomet vars alla koefficienter är 0, uppfyller också polynomet $p(x) = \frac{1}{4}x^2+bx+b^2$, där b är godtyckligt valt kravet.

(b) Sant. För

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-1/\sqrt{2}}{1+1/\sqrt{2}}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

vilket leder till att

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)^2}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-1}{(\sqrt{2}+1)^2}\right| = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)^2 = \ln(\sqrt{2}+1).$$

(c) Sant. Enligt definitionen av arccos är $\arccos(\cos x)$ den vinkel v med $0 \leq v \leq \pi$ för vilken $\cos v = \cos x$, vilket är ekvivalent med att $v = \pm x + 2k\pi$, dvs $v = x + 2k\pi$ eller $v = -x + 2k\pi$ där k är ett heltal. Då $0 \leq v \leq \pi$ och $\pi \leq x \leq 2\pi$, kan inte $v = x + 2k\pi$ för något heltal k, medan $v = -x + 2\pi$ uppfyller kravet, så $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$ då $\pi \leq x \leq 2\pi$.

(d) Falskt. För ortogonala projektionen $\mathbf{v_u}$ av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ gäller

$$\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{(1,2,2) \cdot (5,1,1)}{1^2 + 2^2 + 2^2}(1,2,2) = \frac{5+2+2}{9}(1,2,2) = (1,2,2).$$

(e) Falskt. En eventuell skärningspunkt måste ligga på båda linjerna så det måste då finnas s och t så att $(0+s, 1-s, 1+2s) = (-1-t, 2-t, 1)$, vilket ger ekvationerna $s = -1-t$, $1-s = 2-t$, och $1+2s = 1$. Den sista av dessa ekvationer ger $s = 0$, som insatt i första ekvationen get $t = -1$. Andra ekvationen blir då $1 = 2+1 = 3$, så ekvationssystemet saknar lösning, vilket betyder att linjerna inte skär varandra.

(f) Standardmatrisen för vridning vinkeln θ är ju

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

vilket för $\theta = \frac{\pi}{2}$ ger

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Bilda matrisen A med $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ och $\mathbf{u_3}$ som kolonnvektor och radreducera:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -15 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningar, då ju x_3 är en fri variabel, så kolonnerna i A är linjärt beroende.

4. Genom att integrera partiellt två gånger finner vi att

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int 1 \cdot x \, dx) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

5. Om $\mathbf{u_1} = (2, 7, -3)$ och $\mathbf{u_2} = (-1, 4, -1)$så är

$$\mathbf{u_1} \times \mathbf{u_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2 & 7 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-7+12, -(-2-3), 8+7) = (5,5,15) = 5(1,1,3)$$

så $\mathbf{n} = (1,1,3)$ är en normalvektor till planet. Låt $P_0 = (2,-3,2)$ och $P = (0,-1,1)$ så att $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0 P} = P - P_0 = (0,-1,1) - (2,-3,2) = (-2,2,-1)$. Det sökta avståndet är därför längden av projektionen $\mathbf{v_n}$ av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{n}$. Vi har

$$\mathbf{v_n} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = \frac{(-2,2,-1) \cdot (1,1,3)}{(1,1,3) \cdot (1,1,3)}(1,1,3) = \frac{-3}{11}(1,1,3)$$

så $|\mathbf{v_n}| = \frac{3}{11}\sqrt{11} = \frac{3}{\sqrt{11}}$.

6. Vi följer arbetsgången i Persson-Böiers, och startar med att *beräkna derivatan.* Vi finner

$$f'(x) = -(-1)x^{-2} + (2 - x^{-1})e^{-x}(-1) = -\frac{2e^{-x}}{x^2}(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}).$$

Beräkning av derivatans nollställen:

$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

Ena roten är därför 1, och den andra är $-\frac{1}{2}$. *Tecken- och värdetabell:* Då $e^{-x} > 0$ för alla x, behöver vi ite ta med denna faktor i teckenschemat.

x		$-1/2$		0		1	
$x+1/2$	$- - -$	0	$+ + +$	$+$	$+ + +$	$+$	$+ + +$
x^2	$+ + +$	$+$	$+ + +$	0	$+ + +$	$+$	$+ + +$
$x-1$	$- - -$	$-$	$- - -$	$-$	$- - -$	0	$+ + +$
$f'(x)$	$- - -$	0	$+ + +$	nan	$+ + +$	0	$- - -$
$f(x)$	$\searrow$	$4\sqrt{e}$	$\nearrow$	nan	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$

Beräkning av lämpliga gränsvärden

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2 - \frac{1}{x})e^{-x} = \lim_{t\to\infty}\frac{-2t-1}{-t}e^t = \lim_{t\to\infty}\frac{2t+1}{t}e^t = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2 - \frac{1}{x})e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{xe^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2 - \frac{1}{x})e^{-x} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2 - \frac{1}{x})e^{-x} = -\infty.$$

Skiss av funktionskurvan: Se Figur 1 i slutet av dokumentet.

7. Vi radreducerar den utvidgade koefficientmatrisen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 1 & 4 & 2k & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 3 & 2k-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k & 0 \end{bmatrix}.$$

Sista ekvationen är $(2-k)x_3 = 0$, så om $k \neq 2$ följer $x_3 = 0$. Andra ekvationen är $x_2 + (k-1)x_3 = 0$, vilket då $x_3 = 0$ medför att $x_2 = 0$. Första ekvationen är $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, vilket ger $x_1 = 0$, då ju $x_2 = x_3 = 0$. För $k \neq 2$ har systemet således enbart den triviala lösningen. Om $k = 2$ ger sista ekvationen att $0 = 0$ och x_3 är fri. Andra ekvationen är $x_2 + x_3 = 0$, så $x_2 = -x_3$. Då $x_2 + x_3 = 0$, ger första ekvationen $x_1 = 0$. Lösningen blir därför i detta fall $(x_1, x_2, x_3) = (0, -x_3, x_3)$.

8. En godtyckligt vald punkt P på kurvan kan skrivas som $P = (x, e^x)$. Linjen kan skrivas på parameterform som $(x, y) = t(1, 2)$, så $\mathbf{u} = (1, 2)$ är en riktningsvektor och $O = (0, 0)$ ligger på linjen. Med $\mathbf{v} = \vec{OP}$, får man genast avståndet från P till linjen som $|\mathbf{v}^{\perp}|$, där $\mathbf{v}^{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\mathbf{u}}$. Vi har $\mathbf{v} = \vec{OP} = P - O = (x, e^x) - (0, 0) = (x, e^x)$, så

$$\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{(x,e^x)\cdot(1,2)}{1^2+2^2}(1,2) = \frac{x+2e^x}{5}(1,2) = (\frac{x+2e^x}{5}, \frac{2(x+2e^x)}{5}).$$

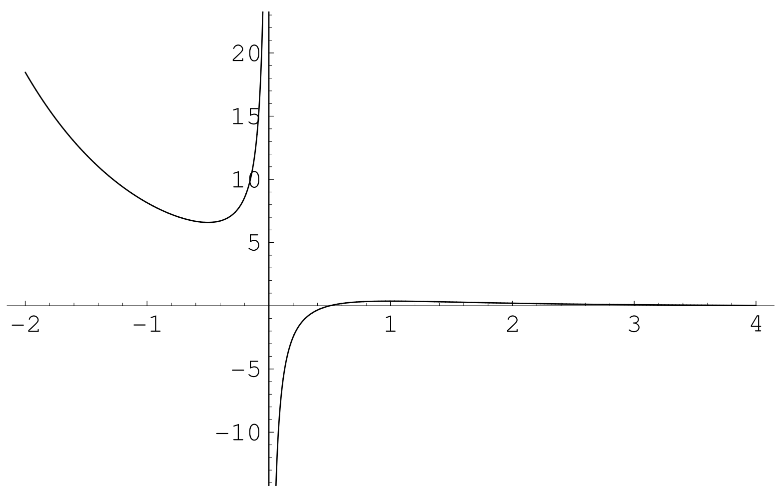
Härav följer

$$\mathbf{v}^{\perp} = (x,e^x) - (\frac{x+2e^x}{5}, \frac{2(x+2e^x)}{5}) = (\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}e^x, \frac{1}{5}e^x - \frac{2}{5}x) = \frac{2x-e^x}{5}(2,-1),$$

så

$$|\mathbf{v}^{\perp}| = \frac{|2x-e^x|}{5}|(2,-1)| = \frac{|e^x-2x|}{\sqrt{5}}.$$

Vi vill alltså bestämma x så att $|e^x - 2x|$ blir så litet som möjligt. Låt $f(x) = e^x - 2x$. Då är $f'(x) = e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$ och då e^x är strängt växande, är $f'(x) < 0$ för $x < \ln 2$ och $f'(x) > 0$ för $x > \ln 2$. Så f har minsta värdet för $x = \ln 2$ och $f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 \approx 0.613706 > 0$. Då minsta värdet av f är positivt, är $f(x) = e^x - 2x = |e^x - 2x|$. Kortatste avståndet får man därför för $x = \ln 2 \approx 0.693147$.



Figur 1: Kurvan i uppgift 6.