

Tentamen MMGF11

Torsdag 21 oktober 2010, kl. 08.30-12.30

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)
Ett plan går genom punkterna $P_1 = (1, 2, 2)$, $P_2 = (1, 1, 0)$ och $P_3 = (2, 1, -1)$.

- (a) Bestäm planets ekvation på normalform.
(b) Finn arean av triangeln med hörn i P_1 , P_2 och P_3 .
(c) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

- (d) Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

- (a) Funktionen f , definierad genom $f(x) = \frac{\pi}{2}x + \cos(\frac{\pi}{2}x)$, $x \in [-20, 20]$ är strängt växande.
(b) Standardmatrisen för vridning i planet vinkeln $\frac{\pi}{4}$ moturs är

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

- (c) Talet $\frac{3}{4}$ är en approximation av den positiva roten till ekvationen $x^5 + x - 1 = 0$ med ett fel som inte överstiger 0.01.
(d) Det finns inget tal b för vilket linjerna $(x, y, z) = (1, 0, 2) + t(0, 1, -1)$ och $(x, y, z) = (1, -3, -1) + t(0, b, 2)$ blir parallella
(e) Funktionen f , definierad genom $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ är deriverbar för $x = 0$.
(f) Om $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är en standardbas för $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$.

3. Rita kurvan

$$y = \frac{e^x}{x}$$

i stora drag.

4. Bestäm avståndet från punkten $P = (3, 2, 1)$ till planet med ekvation $x + 2y + 3z = 4$.

5. En rektangel har en sida längs x -axeln, en sida längs linjen $x = a$, där $0 \leq a \leq 9$, en sida längs linjen $x = 9$ och ett hörn i punkten $(a, \sqrt{a})$. Bestäm a så att en sådan rektangel har största möjliga arean.
6. Bestäm alla tal k sådana att vektorn

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

är en linjär kombination av vektorerna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7. Låt funktionen f vara definierad genom $f(x) = e^x$ om $x < 0$ och $f(x) = ax + b$ om $x \geq 0$. Bestäm, om möjligt, a och b så att f blir deriverbar.
8. Avgör om vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är linjärt beroende eller linjärt oberoende.