

MMGF11, Kortfattade ösningar till tentamen 21/10 2010

1. Låt $\mathbf{u} = \vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (0, -1, -2)$ och $\mathbf{v} = \vec{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (1, -1, -3)$.

En normal till planet är

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (1, -2, 1)$$

och en punkt i planet är P_1 . Med $P = (x, y, z)$ blir planets ekvation $(P - P_1) \cdot \mathbf{n} = 0$ dvs. $(x - 1, y - 2, z - 2) \cdot (1, -2, 1) = 0$, vilket förenklat blir $x - 2y + z + 1 = 0$.

- (b) Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är två sidor i triangeln, så dess area är hälften av längden av vektorn $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, vilket ger $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}/2 = \sqrt{6}/2$.

- (c) Som bekant är

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ och } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(standardgränsvärden) så

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

- (d) Om $f(x) = \frac{e^x}{x}$ är $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$.

2. (a) Sant. Funktionens derivata är $\frac{\pi}{2}(1 - \sin(\frac{\pi}{2}))$ som är större än 0 utom då $x = 1 + 4n$, n heltal, då derivatan är 0, dvs för alla utom ändligt många punkter i intervallet $[-20, 20]$, så funktionen är strängt växande.

- (b) Falskt. Standardmatrisen för vridning vinkeln θ moturs är ju

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

vilket för $\theta = \frac{\pi}{4}$ ger

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

- (c) Med $f(x) = x^5 + x + 1$ är $f'(x) = 1 + 5x^4$ som ju är större än 0 för alla x så ekvationen $f(x) = 0$ har högst en reell rot. Vi har $f(0) = -1 < 0$, $f'(1) = 1 > 0$ så $f(x) = 0$ har exakt en rot i intervallet $[0, 1]$. Då $f(1/2) = -15/32$ har ekvationen även exakt en rot i intervallet $[1/2, 1]$. Då f' är strängt växande i intervallet $[1/2, 1]$ är $f'(x) \geq f'(1/2) = 21/16 = m$ i intervallet. Eftersom $f(3/4) = -13/1024$, ger Sats 4, Kap. 4.5 i Böiers-Persson att felet uppgår till högst

$$err = \frac{|f(3/4)|}{m} = \frac{13}{1344} < 0.01.$$

- (d) Falskt. Två linjer är parallella precis då de har parallella riktningsvektorer. Riktningsvektorer för linjerna är $\mathbf{u}_1 = (0, 1, -1)$ och $\mathbf{u}_2 = (0, b, 2)$ och $\mathbf{u}_1 = k\mathbf{u}_2 \Leftrightarrow k = -2, b = -2$.

- (e) Falskt. Med $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ är $f(0) = 0$ och

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|h|\sqrt{1-h^2}}{h} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|h|\sqrt{1-h^2}}{h} = 1.$$

Då vänster- och högergränsvärdena är olika, finns inte gränsvärdet, så funktionen är inte deriverbar för $x = 0$.

- (f) Sant. Eftersom $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$ och $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ är en vektor i $\mathbb{R}^3$ finns det entydigt bestämda tal x_1, x_2, x_3 så att

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

Genom att skalärmultiplicera båda led med $\mathbf{e}_1$ och utnyttja att $\mathbf{e}_1$ är vinkelrät mot både $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ följer det att $x_1 = 0$. På samma sätt följer det att $x_2 = 0$, så vi har

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = x_3\mathbf{e}_3.$$

Då $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är vinkelräta mot varandra och har längd 1, har $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ längd 1, precis som $\mathbf{e}_3$, så $|x_3| = 1$. Eftersom både $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ är högerorienterade är $k = 1$.

3. Om $f(x) = \frac{e^x}{x}$ består D_f av alla $x \neq 0$. För sådan x vet vi från uppgift 1. (d) att derivatan är $f'(x) > 0$ för $x > 1$, $f'(1) = 0$ och $f'(x) < 0$ för $x < 1$. Vi har

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

Vidare är $f(1) = e$. Vi vet nu hur kurvan uppför sig, och kan rita den i stora drag, se Figur 1.

4. En normal till planet är $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$ och en punkt i planet är t. ex. $P_0 = (4, 0, 0)$. Avståndet från punkten $P = (3, 2, 1)$ till planet är längden av projektionen av vektorn $\mathbf{v} = \vec{P_0P} = P - P_0 = (-1, 2, 1)$ på $\mathbf{n}$. Projektionen $\mathbf{v}_n$ av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{n}$ är

$$\mathbf{v}_n = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = \frac{6}{14} \mathbf{n} = \frac{3}{7} \mathbf{n},$$

$$\text{så } |\mathbf{v}_n| = \left|\frac{3}{7}\right| \cdot |\mathbf{n}| = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{14} = 3\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

5. Från problemformuleringen följer att arean som funktion av a är $A(a) = (9-a)\sqrt{a}$, där $0 \leq a \leq 9$. Detta är en kontinuerlig funktion definierad på ett slutet, begränsat intervall, så den har både ett största och ett minsta värde. Eftersom funktionen är deriverbar i

det öppna intervall $]0, 9[$ antas det största värdet i någon av intervallets ändpunkter eller en punkt i vilken derivatan är 0. Vi har $A'(a) = \frac{3}{2\sqrt{a}}(3-a)$, som är 0 precis då $a = 3$. Då $f(0) = 0$, $f(3) = 6\sqrt{3}$ och $f(9) = 0$, följer att största värdet är $6\sqrt{3}$ som antas för $a = 3$.

6. Vektorn $\mathbf{w}$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ precis då ekvationssystemet, vars utvidgade matris är $U = [\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}]$ är lösbart. Vi har

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & k+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}.$$

Så systemet är lösbart precis då $k = 1$.

7. Eftersom funktionen är e^x för $x < 0$ och $ax + b$ för $x > 0$ och dessa båda funktioner är deriverbara, följer att f är deriverbar för alla $x \neq 0$. För att f skall kunna vara deriverbar i $x = 0$ måste f vara kontinuerlig där, dvs. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Då

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_-} e^x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} ax + b = b = f(0),$$

måste $b = 1$. För att undersöka deriverbarheten av funktionen given av $f(x) = e^x$ om $x < 0$ och $f(x) = ax + 1$ går vi tillbaka till definitionen. Vi har

$$\lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{ah + 1 - 1}{h} = a,$$

så för att f skall vara deriverbar i 0 måste $a = 1$. Omvänt visar gränsvärdeberäkningarna ovan att om $a = b = 1$, så är f deriverbar i 0 och därmed för alla x .

8. Vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende $\Leftrightarrow x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow$ det homogena ekvationssystemet, vars utvidgade matris är $U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{0}]$ har enbart den triviala lösningen. Vi har

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta visar att ekvationssystemet har enbart den triviala lösningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

