Matematik
Göteborgs universitet
R. Andersson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare är tillåten
Telefonvakt: Oskar Hamlet
tel 0703 - 088304

Tentamen MMGF11

Fredag 21 oktober 2011, kl. 14.00-18.00

Om inget annat anges, skall den fullständiga lösningen på uppgiften redovisas, inklusive räkningar, eventuella hänvisningar till satser och motiveringar. Varje uppgift ger maximalt tre poäng utom den första som ger 4 poäng.

1. På den här uppgiften skall du bara ge svar. (En poäng per deluppgift.)

   (a) Ange en vektor skild från nollvektorn som är vinkelrät mot vektorerna $\mathbf{u} = (2, 1, -2)$ och $\mathbf{v} = (4, -3, 7)$.

   (b) Finn arean av triangeln uppspänd av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i (a)-uppgiften.

   (c) Beräkna
   $$\lim_{x\to 0} \frac{7\sin x^2}{4x\sin x + 3x^2}.$$

   (d) Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \ln(\cos x) + x$ för $|x| < \frac{\pi}{2}$.

2. Nedan ges sex påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 poäng, fel svar -0,5 poäng och inget svar 0 poäng. Du kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   (a) Om för funktionen f gäller att f^2 är deriverbar, så är f det också.

   (b) För alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$ gäller
   $$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

   (c) Funktionen f definierad genom $f(x) = |x|x$ är deriverbar för alla x.

   (d) Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ båda är lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så är $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (e) Det går att bestämma $f(0)$ så att funktionen f, definierad genom
   $$f(x) = \frac{e^{x+\ln 6} - 6}{x}$$
   blir kontinuerlig.

   (f) Om kolonnerna i matrisen B är linjärt beroende och A är en matris sådan att AB är definierad, så är kolonnerna i AB också linjärt beroende.

3. Vektorena $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är linjärt oberoende. Avgör om vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$, där $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ och $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ är linjärt oberoende.

VÄND!

4. Rita kurvan

$$y = \frac{4x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

i stora drag.

5. Bestäm det kortaste avståndet från origo till planet med ekvation $-4x - 3y + z = -4$.

6. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ i den punkt på kurvan som har $x-$koordinat 1.

7. För vilka värden på k har systemet

$$\begin{cases} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & 1 \\ kx & + & y & + & z & = & -2 \end{cases}$$

ingen lösning, en entydigt bestämd lösning, resp. oändligt många lösningar?

8. Bestäm största och minsta värde av

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Kortfattade lösningar till Tentamen HMGF11,
Fredag 21 oktober 2011

(1)

(a) Vektorn $u \times v$ är en vektor vinkelrät mot både u och v. Vi har med $u = (2,1,-2)$ och $v = (4,-3,7)$

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= e_1(7-6) - e_2(14+8) + e_3(-6-4) = e_1 - 22e_2 - 10e_3 = (1,-22,-10)$$

(b) Arean av triangeln uppspänd av u och v är

$$\frac{|u \times v|}{2}.$$

Då $u \times v = (1,-22,-10)$ är $|u \times v| = \sqrt{1^2 + (-22)^2 + (-10)^2} = \sqrt{1+484+100} =$
$= \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$ och arean $\frac{3\sqrt{65}}{2}$.

(c) Eftersom $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (Standardgränsvärde) får vi

$$\frac{7\sin x^2}{4x \sin x + 3x^2} = \frac{7 \cdot \frac{\sin x^2}{x^2}}{4 \cdot \frac{\sin x}{x} + 3} \to \frac{7}{4+3} = 1, \text{ då } x \to 0$$

(d) Enligt kedjeregeln är

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot D(\cos x) + 1 = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) + 1 = -\frac{\sin x}{\cos x} + 1 = 1 - \tan x$$

(2)

(a) Falskt. Ett motexempel är t. ex. $f(x) = |x|$, som inte är deriverbar för $x = 0$, medan $(f^2)(x) = (f(x))^2 = |x|^2 = x^2$ är deriverbar för alla x.

(b) Sant. För alla vektorer u, v i $\mathbb{R}^3$ är

$$|u+v|^2 - |u-v|^2 = (u+v)\cdot(u+v) - (u-v)\cdot(u-v) =$$
$$= u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v - (u\cdot u - u\cdot v - v\cdot u + v\cdot v) = 4\, u\cdot v$$

(c) Sant. För alla $x \neq 0$ är f deriverbar, eftersom den är en produkt av deriverbara funktioner. För $x = 0$ är

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{|h|\cdot h}{h} = |h| \to 0, \text{ då } h \to 0$$

så f är deriverbar i 0 och $f'(0) = 0$.

(d) Sant. Om $\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2$ båda är lösningar till $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ är

$$A\mathbb{x}_1 = \mathbb{b},\ A\mathbb{x}_2 = \mathbb{b} \Rightarrow A(\mathbb{x}_1 - \mathbb{x}_2) = A\mathbb{x}_1 - A\mathbb{x}_2 = \mathbb{b} - \mathbb{b} = \mathbb{0}.$$

(e) Sant. För alla $x \neq 0$ är f kontinuerlig, då den är en kvot av kontinuerliga funktioner. Vidare är

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+\ln 6}-6}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x \cdot e^{\ln 6}-6}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x\cdot 6 - 6}{x} =$$

$$= 6 \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 6 \cdot 1 = 6$$

så med $f(0) = 6$ blir f kontinuerlig även i $x = 0$

(f) Sant. Om kolonnerna i B är linjärt beroende har ekvationen $B\mathbb{x} = \mathbb{0}$ en icke-trivial lösning, säg $\mathbb{x}_0$. Men då är

$$(AB)\mathbb{x}_0 = A(B\mathbb{x}_0) = A\mathbb{0} = \mathbb{0}$$

så ekvationen $(AB)\mathbb{x} = \mathbb{0}$ har en icke-trivial lösning, vilket medför att kolonnerna i AB är linjärt beroende.

(3) Vi har

$$x\mathbb{u} + y\mathbb{v} + z\mathbb{w} = x(\mathbb{a} + \mathbb{b}) + y(\mathbb{b} + \mathbb{c}) + z(\mathbb{a} + \mathbb{c}) =$$

$$= (x+z)\mathbb{a} + (x+y)\mathbb{b} + (y+z)\mathbb{c} = \mathbb{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

eftersom $\{\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}\}$ är linjärt oberoende. Systemets utvidgade matris är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket visar att enda lösning är $x = y = z = 0$, och att $\{\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}\}$ är linjärt oberoende.

4 Vi följer arbetsgången i Persson–Böiers.

1. Beräkna derivatan. Vi har med $f(x) = \frac{4x^2+4x-1}{x^2-2x+1} = \frac{4x^2+4x-1}{(x-1)^2}$ att

$$f'(x) = \frac{(8x+4)(x-1)^2 - (4x^2+4x-1)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{(8x+4)(x-1)-2(4x^2+4x-1)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{8x^2-8x+4x-4-(8x^2+8x-2)}{(x-1)^3} = \frac{-12x-2}{(x-1)^3} = -12\,\frac{x-\frac{1}{6}}{(x-1)^3}$$

2. Derivatans teckenväxlingar

Vi har $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{6}$, och nämnaren är 0 för $x = 1$, så enda punkter där derivatan kan växla tecken är $\frac{1}{6}$ och 1.

3. Teckenschema och värdetabell

x		$\frac{1}{6}$		1	
$x-\frac{1}{6}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x-\frac{1}{6}}{(x-1)^3}$	$+$	0	$-$	odef	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	odef	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{8}{25}$	$\nearrow$	odef	$\searrow$

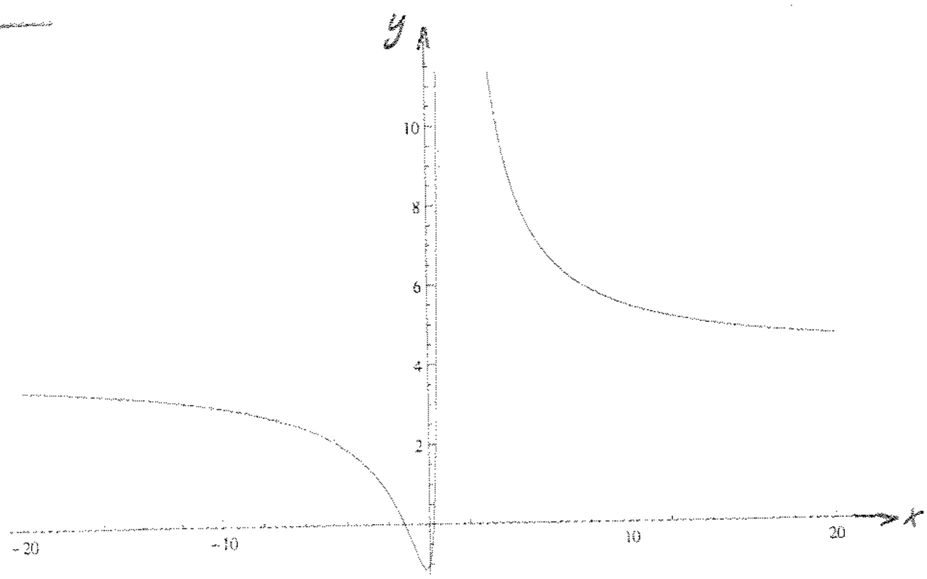
Teckentabellen visar att f har strängt lokalt minimum $-\frac{8}{25}$ för $x = \frac{1}{6}$.

4. Beräkning av vissa gränsvärden

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{4x^2+4x-1}{(x-1)^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{4x^2+4x-1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2+4x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{4+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 4 = \lim_{x\to +\infty} \frac{4+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

5. Skiss av kurvan



5 En punkt i planet är t. ex. $P_0 = (0,0,-4)$ och en normal är $\mathbf{n} = (-4,-3,1)$. Om $P = (0,0,0)$ (origo) och $\mathbf{w} = \overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (0,0,4)$ är det sökta avståndet längden av projektionen av $\mathbf{w}$ på $\mathbf{n}$. Vi har

$$\mathbf{w}_{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n} = \frac{4}{26}\mathbf{n} = \frac{2}{13}\mathbf{n}$$

vilket ger

$$|\mathbf{w}_{\mathbf{n}}| = \frac{2}{13}|\mathbf{n}| = \frac{2}{13}\sqrt{26}.$$

6 Med $f(x) = \sqrt{x^2+3x} = (x^2+3x)^{\frac{1}{2}}$ är $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+3x)^{-\frac{1}{2}}\cdot D(x^2+3x) = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$

och $f'(1) = \dfrac{2\cdot 1+3}{2\sqrt{1^2+3}} = \dfrac{5}{2\sqrt{4}} = \dfrac{5}{4}$. Då $f(1) = \sqrt{1^2+3} = \sqrt{4} = 2$

blir tangentens ekvation

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \frac{5}{4}(x-1).$$

7 Den utvidgade matrisen för systemet är

$$\begin{array}{c} -1 \\ \\ -k \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ +1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & -2-k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{bmatrix}$$

För $k=1$ är $2-k-k^2=0$ medan $-2-k=-3$. Tredje raden är därför av formen $[0\ 0 \dots 0\ b]$ med $b \neq 0$ och systemet är olösbart.

Den andra roten till ekvationen $2-k-k^2=0$ är $k=-2$ och $-2-k = -2-(-2) = 0$ och tredje raden en nollrad. För $k=-2$ är $k-1=-3$ och vi har två pivåkolonner, därmed en fri variabel och oändligt många lösningar. För $k \neq 1, -2$ har vi en pivåposition i varje rad och i varje kolonn och därför en entydigt bestämd lösning.

8 För alla $x \in \mathbb{R}$ är $x^2+1 \geq 1$ med likhet endast då $x=0$ och då $\ln$ är strängt växande, är $\ln(x^2+1) \geq \ln 1 = 0$ med likhet endast då $x=0$. Eftersom nämnaren $\sqrt{x^2+1}$ alltid är ≥ 1, är funktionens minsta värde 0, och detta värde antas endast för $x=0$. Vi har

$$f'(x) = D\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\right) = D\left(\frac{\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot D(x^2+1)\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - \ln(x^2+1)\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot D(x^2+1)}{[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}]^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - \ln(x^2+1)\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+1} = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln(x^2+1)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x(2-\ln(x^2+1))}{(x^2+1)^{3/2}}$$

så $f'(x) = 0 \iff x=0$ eller $\ln(x^2+1) = 2 \iff x=0$ eller $x = \pm\sqrt{e^2-1}$.

Eftersom $\ln$ är strängt växande är $2-\ln(x^2+1)<0$ (5)

då $x^2>e^2-1$ och $2-\ln(x^2+1)>0$ då $x^2<e^2-1$. Eftersom f är jämn dvs $f(-x)=f(x)$ för alla x, räcker det att se vad som händer för $x\geq 0$. Om $0<x<\sqrt{e^2-1}$ är, enligt vad vi just visat, $f'(x)>0$ och om $x>\sqrt{e^2-1}$ är $f'(x)<0$. Detta visar att funktionens största värde för $x\geq 0$ antas då $x=\sqrt{e^2-1}$ och är $f(\sqrt{e^2-1})=\frac{2}{e}$. Då funktionen är jämt antar funktionen också sitt största värde $\frac{2}{e}$ för $x=-\sqrt{e^2-1}$.