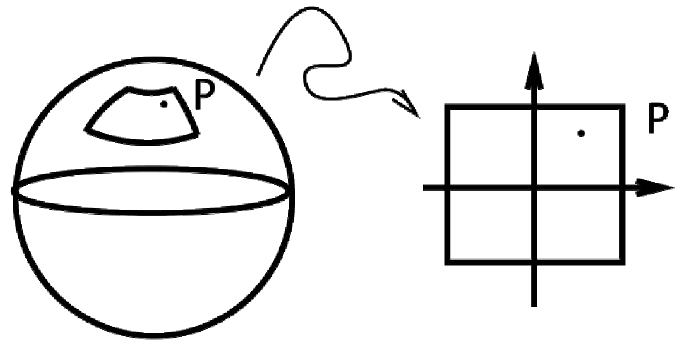
Varför flera variabler ?



Uppgift: Beskriv vädret i ett område på jordytan.
För varje P i området och tidpunkt t behövs åtminstone:

temp (T), tryck (p), luftfuktighet (h), vindriktning och styrka (en vektor (v_1,v_2)).

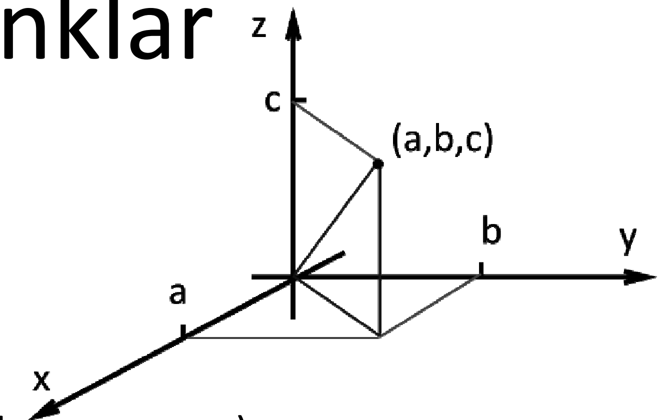
De varierar alla med P och t.

Till varje (P,t) ordnas

$$(T(P,t),p(P,t),h(P,t),v_1(P,t),v_2(P,t)),$$

en avbildning från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^5$

Avstånd och vinklar



Kan *addera* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Avståndet mellan **0** och **x** ges av

$$|\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$ (motiveras av Pythagoras sats)

Två vektorer **x** och **y** bör vara vinkelräta om

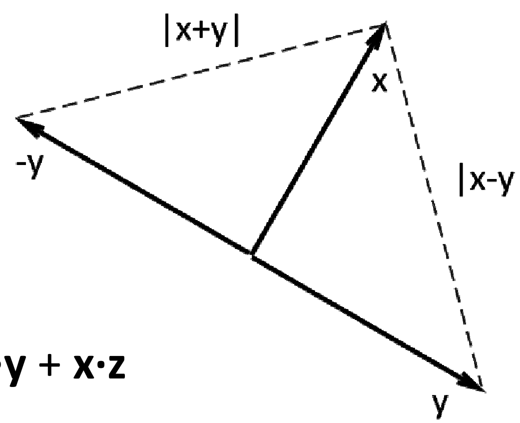
$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \text{ eller (ekvivalent) } |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2$$

eller

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2$$

som förenklas till

$$0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$



Motiverar införandet av *skalärprdukten*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Observera att $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ och att $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$

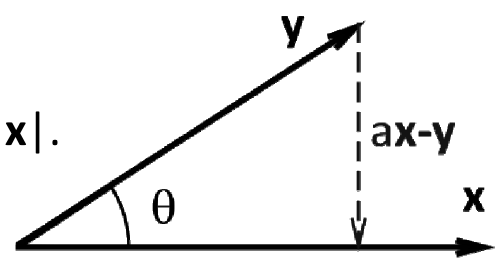
Cauchy - Schwarz:

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$$ med likhet precis när **x** och **y** är parallella.

Visas algebraiskt.

Vinkel mellan **x** och **y**.

Söker a så att $a\mathbf{x} - \mathbf{y}$ är vinkelrät mot **x** . Ska ha



$$0 = \mathbf{x}\cdot(a\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = a|\mathbf{x}|^2 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \quad \text{eller} \quad a=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})/|\mathbf{x}|.$$

Definitionen av cosinus bör nu ge att

$$\cos(\theta) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})/(|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|).$$ Vi har använt intuition för att komma fram till

detta, men Cauchy – Schwartz visar att HL är mellan -1 och 1 , så vi kan ta detta som *definition* av vinkeln θ mellan **x** och **y** . Den mäts mellan 0 och π .

Triangelolikheten.

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$ (Uppenbart enligt intuition som vi inte vill förlita oss till)

Följer från Cauchy - Schwarz:

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y})\cdot(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2$$

Från detta följer den *utökade triangelolikheten:*

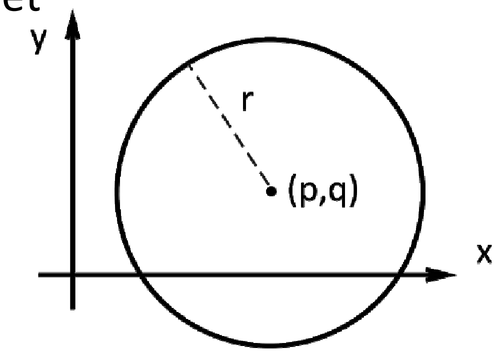
$$\big||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|\big| \le |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$

Vanliga figurer i planet

Cirkel med radie r och medelpunkt **p** : alla **x** med avstånd r till **p.**

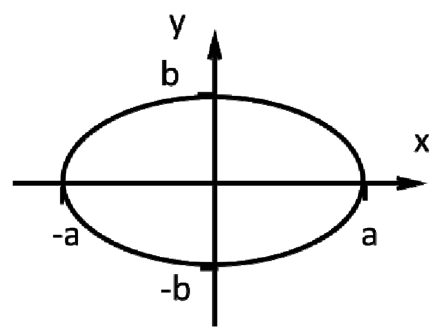
Ekvation: $|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2 = r^2$. Med **p** = (p,q) och **x** = (x,y) blir det

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 .$$



Ellips (skalförändrad cirkel):

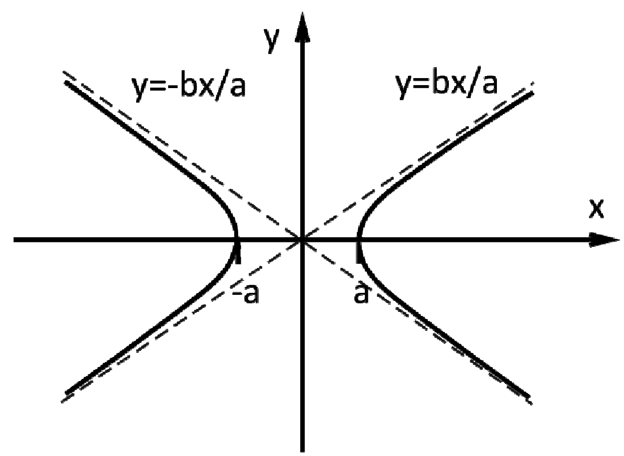
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



Hyperbel: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ Detta ger

$$\left(\frac{b}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

som ger $\frac{y}{x} \to \pm\frac{b}{a}$ när $x \to \pm\infty$



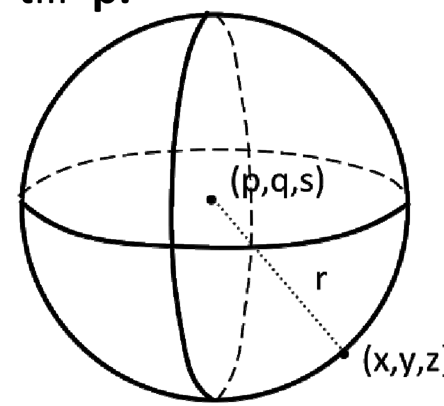
Vanliga figurer i rummet

Klot och sfär med radie r och medelpunkt **p**: alla **x** med avstånd r till **p.**

Ekvation: $|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2 \le r^2$ respektive $|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2 = r^2$.

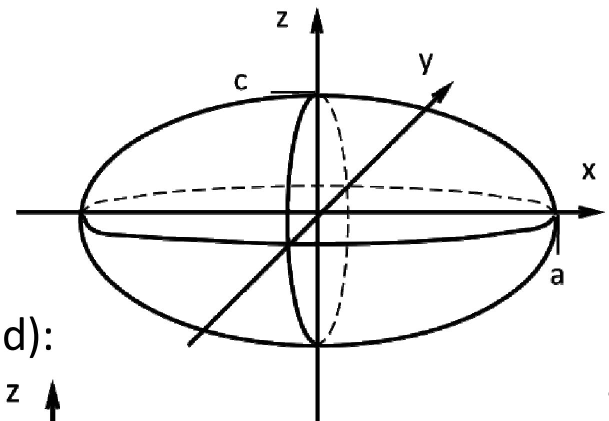
Med $\mathbf{p} = (p,q,s)$ och $\mathbf{x} = (x,y,z)$ blir det

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-s)^2 \le r^2 \quad \text{resp} \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-s)^2 = r^2 .$$



Ellipsoid (skalförändrad sfär):

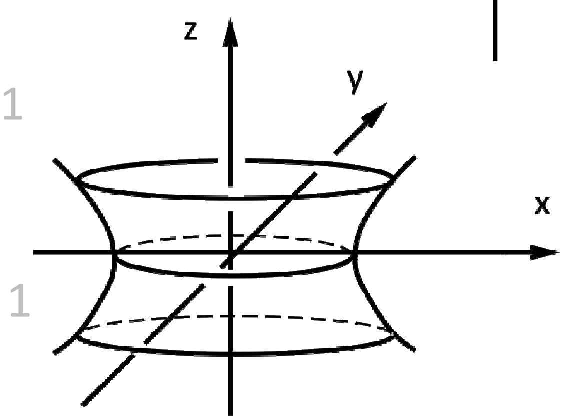
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

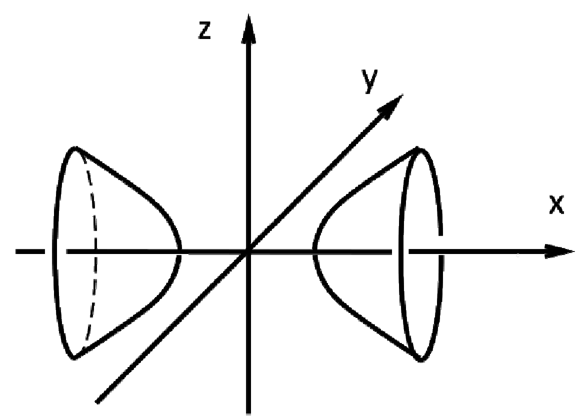


Hyperboloid (enmantlad och tvåmantlad):

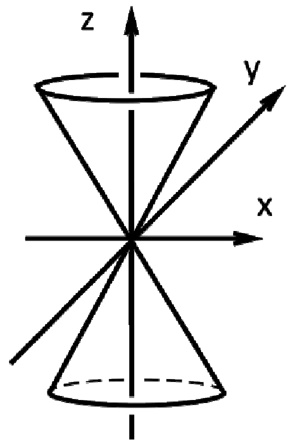
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

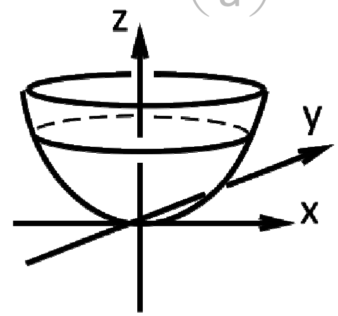




Kon: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z^2$



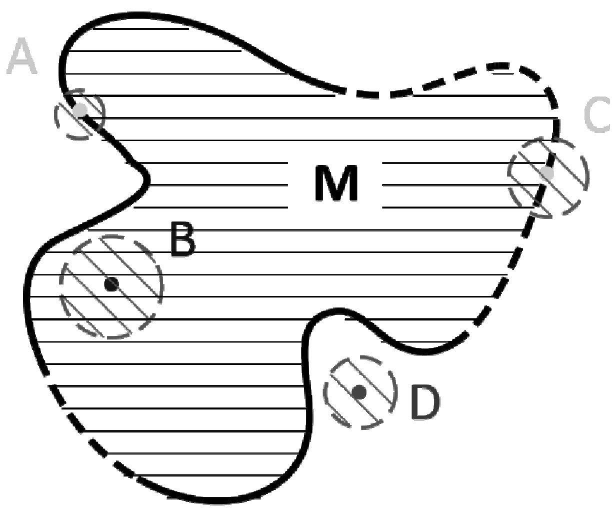
Paraboloid: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z$



Olika typer av punkter i för hållande till en given delmängd M till $\mathbf{R}^n$

En punkt **P** är en *inre punkt* till **M** om det finns en boll kring **P** innehållen i **M** .

En punkt **P** är en *yttre punkt* till **M** om det finns en boll kring **P** som inte råkar **M** .
En punkt **P** är en *randpunkt* till **M** om varje boll kring **P** råkar **M** och det som ligger utanför **M** (komplementet till **M**).

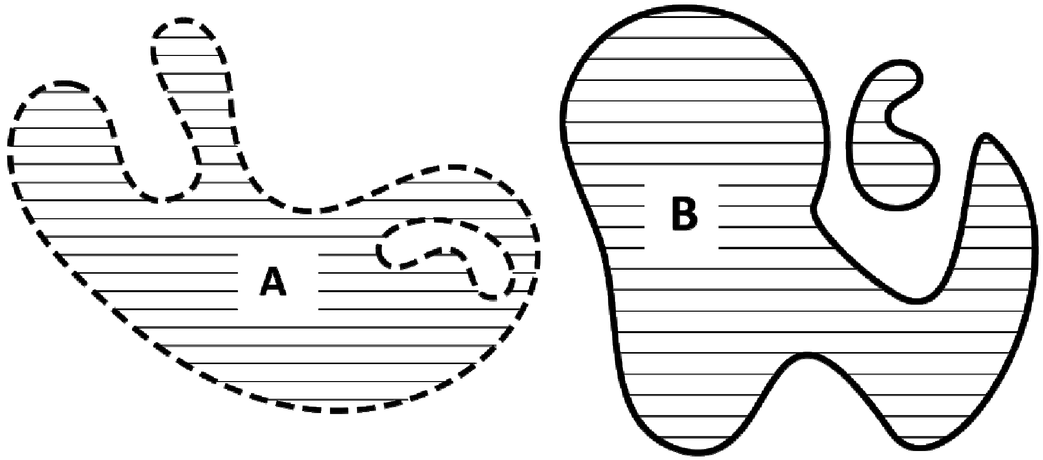


A och **C** är randpunkter till **M** .
B är en inre punkt till **M** .
D är en yttre punkt till **M** .

Öppna och slutna mängder

En mängd är *sluten* om den innehåller alla sina randpunkter.

En mängd är *öppen* om den inte innehåller någon enda av sina randpunkter.



A är öppen.

B är sluten.