Koordinatprincipen

Om $\mathbf{b} = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$ är en punkt i $\mathbf{R}^n$ så gäller, för varje i mellan 1 och n ,

$$|b_i| \le |\mathbf{b}| \le |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|.$$

Den vänstra olikheten följer direkt av att $|b_i|^2 = b_i^2$ och att $|\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$. Den högra av triangelolikheten använd på $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\,\mathbf{e}_n$, där $\mathbf{e}_i$ står för vektorn med nollor i varje koordinat så när som på en 1:a i koordinat i .

Antag att funktionen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ldots,f_n(\mathbf{x}))$ och att punkten $\mathbf{A}$ har koordinaterna

$(A_1,A_2,\ldots A_n)$.

Med $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}$ får vi

$$|f_i(x) - A_i| \le |\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\ | \le |f_1(\mathbf{x}) - A_1| + |f_2(\mathbf{x}) - A_2| + \cdots + |f_n(\mathbf{x}) - A_n|.$$

Detta ger, när $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, att

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{A} \text{ precis när } f_i(\mathbf{x}) \to A_i\text{, för varje } 0 \le i \le n\ .$$

Gränsvärden av vektorvärda funktioner kan alltså beräknas genom att man beräknar gränsvärden för var och en av (de skalärvärda) koordinatfunktionerna

Kontinuerliga funktioner $R^n \to R^m$

Definition Om funktionen **$f : R^n \to R^m$** är definierade i punkten **a** så är **f** *kontinuerlig* där om $\lim_{x \to a} f(x)$ finns. (Det måste då vara **$f(a)$**.)

Funktionen är *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd.

Koordinatprincipen ger: **f** kontinuerlig precis när varje koordinatfunktion f_i är kontinuerlig.

De vanliga iakttagelserna om kontinuerliga funktioner från envariabeln gäller även i flervariabeln. T.ex

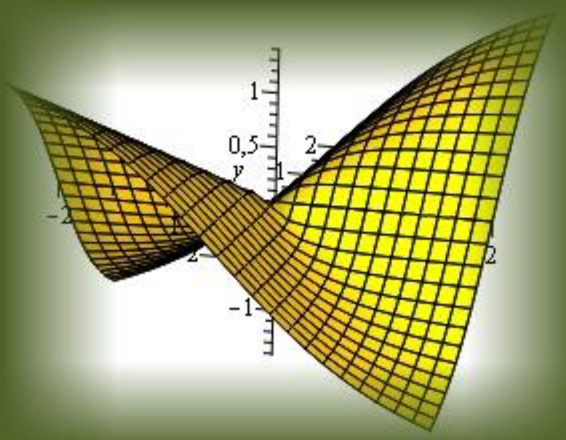
- Summa av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig
- Produkt av reellvärda kontinuerliga funktioner är kontinuerlig
- Kvot mellan två reellvärda kontinuerliga funktioner är kontinuerlig (men inte definierad när nämnaren är 0.
- Sammansättning av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.
- Skalärprodukt av två vektorvärda kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

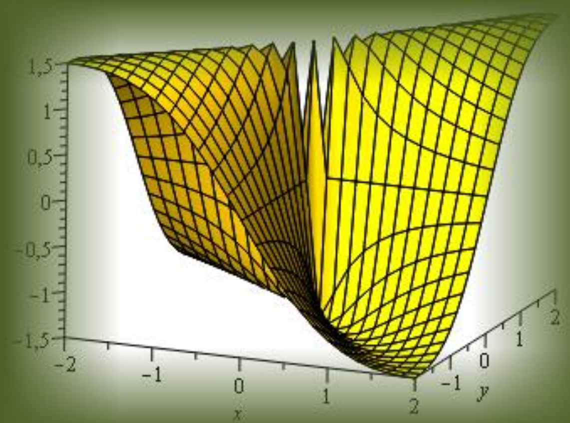
Ex Argumentera för att **$f(x,y) = (x^2+2xy, \sin xy)$** är kontinuerlig.

Ex Sätt $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ när $(x,y) \neq (0,0)$ och $f(0,0) = 0$. Då är f kontinuerlig.

Ex Det går inte att ge f något värde i origo så att den blir kontinuerlig där om

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ när } (x,y) \neq (0,0) .$$





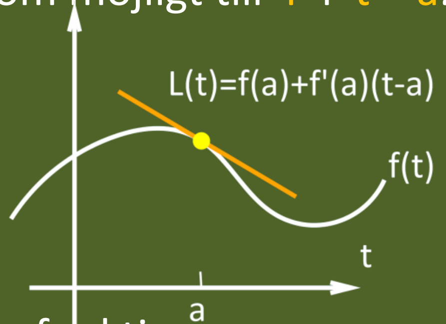
Derivering i envariabel-fallet

Två olika sätt att se på derivatan av $f(t)$ i $t = a$:

1. Derivatan av $f(t)$ i a mäter den momentana förändringen av funktionsvärdet i förhållande till förändring i variabeln (i a). Detta leder till att derivatan ska vara

$$f'(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

2. En linjär funktion L som går genom $(a, f(a))$ ges av formeln $L(t) = f(a) + k(t - a)$ för något värde på k . Vi söker k så att L ansluter så väl som möjligt till f i $t = a$.



Vi ska då ha

$$\left| \frac{f(t) - L(t)}{t - a} \right| = \left| \frac{f(t) - f(a) - k(t - a)}{t - a} \right| = \left| \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - k \right| \to 0$$

när $t \to a$. Det betyder att k ska vara $f'(a)$. Den linjära funktionen

$$L(t) = f(a) + f'(a)(t - a)$$

är *lineariseringen* av f i a . (Taylorpolynomet av ordning 1.) Grafen till L är *tangentlinjen* till f i punkten $(a, f(a))$.

1 och 2 leder till olika saker i flervariabel-fallet: partiella derivator, respektive differentierbarhet

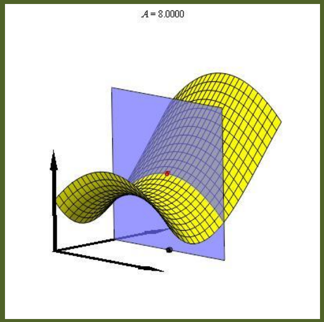
Partiella derivator

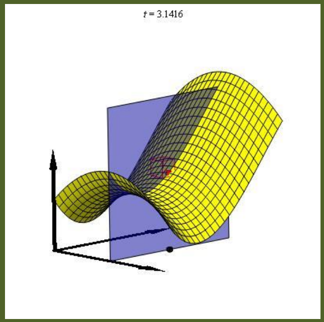
Om $f(x,y)$ är en reellvärd funktion av två variabler och (a,b) en fix punkt i planet får vi två envariabelfunktioner $f(x,b)$ respektive $f(a,y)$. Derivatorna av dessa kallas *partialderivatorna* av f i punkten (a,b) med avseende på x respektive y .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$$

De mäter den momentana förändringen av funktionsvärdet i (a,b) då en av variablerna varierar.

Om f beror på fler variabler $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ kan Man derivera partiellt med avseende på var och En av dem. En formel för partiella derivatan i $\mathbf{a}$ med avseende på i:te koordinaten x_i blir då





$$f_{x_i}'(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

Där $\mathbf{e}_i$ är vektorn med nollor som koordinater förutom en 1:a i koordinat i .

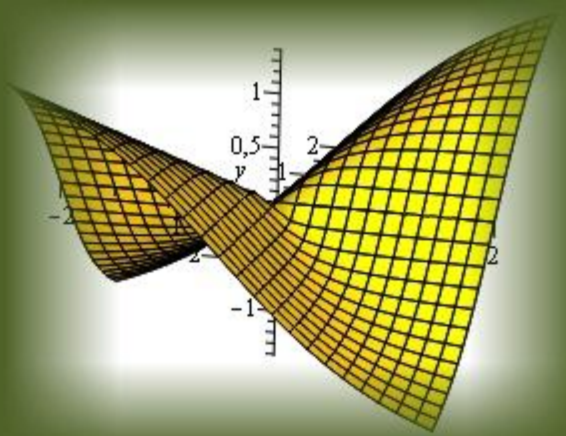
Funktionen f är *partiellt deriverbar i* $\mathbf{a}$ om alla partiella derivator finns i $\mathbf{a}$.

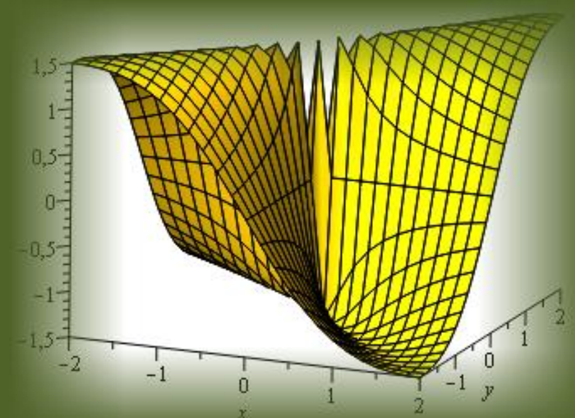
Den är *partiellt deriverbar* om den är partiellt deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd.

Nackdelar: Beror på valet av koordinatsystem. Garanterar inte att det finns ett tangentplan.

Ex Sätt $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ när $(x,y) \neq (0,0)$ och $f(0,0) = 0$. Då är f partiellt deriverbar i $(0,0)$.

Ex Sätt $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ när $(x,y) \neq (0,0)$ och $f(0,0) = 0$. Då är f partiellt deriverbar i $(0,0)$.





Att det finns partiella derivator i en punkt garanterar inte att funktionen är kontinuerlig där!

Ex Bestäm de partiella derivatorna $f'_x(1,2)$ och $f'_y(1,2)$ till $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2$.

Gradienten till f i $(1,2)$ är vektorn $\text{grad}\, f(1,2) = (f'_x(1,2),\, f'_y(1,2))$

Differentierbarhet (Linjär approximation)

En funktion $L(\mathbf{x})$ som ges av en formel av typen $L(\mathbf{x}) = b + \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ där b är någon skalär och $\mathbf{A}$ någon vektor kallas *linjär*. Lägg märke till att $L(\mathbf{a}) = b$.

Antag att $f(\mathbf{x})$ är en reellvärd funktion $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ och att $\mathbf{a}$ är en punkt i f:s definitionsmängd.

Vi söker en linjär funktion L som ansluter så väl som möjligt till f i $\mathbf{a}$. Vi ska då ha

$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, för något $\mathbf{A}$ och att

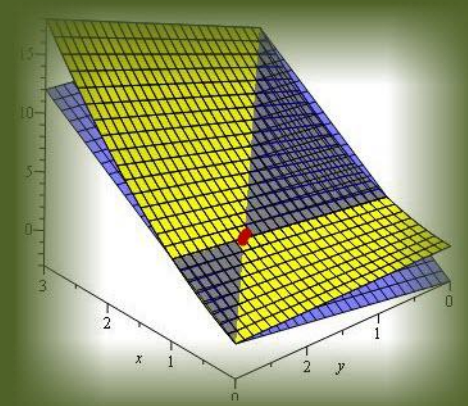
$$\frac{|f(x)-L(x)|}{|x-a|} = \frac{|f(x)-f(a)-A\bullet(x-a)|}{|x-a|} \to 0$$

när $x \to a$. Genom att sätta $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{e}_i$ inser man att $\mathbf{A}$ måste vara gradienten till f i $\mathbf{a}$: $\mathbf{A} = \text{grad } f(\mathbf{a})$.

Definition Funktionen $f(\mathbf{x})$ är *differentierbar* i punkten $\mathbf{a}$ om den är partiellt deriverbar där och

$$\frac{|f(x)-f(a)-\text{grad } f(x)\bullet(x-a)|}{|x-a|} \to 0$$

när $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$.



Ex Visa att $f(x,y) = x^2+xy$ är partiellt deriverbar i $(1,2)$.

Grafen $z= L(x,y) = f(1,2) + \text{grad } f(1,2)\cdot(x-1,y-2)$ kallas tangentplanet

till f i punkten $(1,2,f(1,2))$. Funktionen $L(x,y)$ är *linearisering* av f i $(1,2)$.