Lösning till dugga i MMGF02 Flervariabelanalys, 10 02 01, kl 13.00–13.30.

1. Tangentplanet är grafen $z = L(x)$ till lineariseringen

$$L(x, y) = f(1, 1) + \operatorname{grad} f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1)$$

Vi har $\operatorname{grad} f = (2xy + 1, x^2 - 2y)$ så $\operatorname{grad} f(1, 1) = (3, -1)$. Eftersom $f(1, 1) = 0$ blir ekvationen för tangentplanet

$$z = 0 + (3, -1) \cdot (x - 1, y - 1) = 3x - y - 2.$$

Svar: $z = 3x - y + 2$

2. Riktningen är vektorn $\mathbf{v} = (-3, 4)/5$, eftersom $|(-3, 4)| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Rikningsderivatan ges av $\operatorname{grad} f(3, 2) \cdot \mathbf{v}$. Vi har $\operatorname{grad} f = (2x + y, x - 1)$, så svaret blir

$$(8, 2) \cdot (-3, 4)/5 = -16/5.$$

Svar: $-16/5$.

3. Vi har

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-4y^2) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot x
\end{aligned}$$

Efter transformering får vi

$$0 = 2y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = (2y^2 + x^2)\frac{\partial f}{\partial v},$$

så $0 = f'_v$. Detta ger att $f = g(u) = g(x^2 - 2y^2)$ där g är en godtycklig (deriverbar) funktion.

Svar: $f(x, y) = g(x^2 - 2y^2)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.