Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys (Fysikprogrammet)

1. Ytan är nivåytan $g(x,y,z) = 0$, där $g(x,y,z) = x^2 + xy^3 - z^2x$, som har gradienten $\nabla g = (2x + y^3 - z^2, 3xy^2, -2zx)$. En normal till tangentplanet ges därför av $\nabla g(3,1,2) = (3,9,-12) = 3(1,3,-4)$. Vi kan välja normalen $(1,3,-4)$

   En ekvation för planet ges därför av

   $$0 = (1,3,-4) \cdot (x-3, y-1, z-2) = x + 3y - 4z + 2.$$

   Svar: $0 = x + 3y - 4z + 2$.

2. Söker stationära punkter. Vi deriverar och får

   $$\begin{cases} 0 &= f'_x &= 2xy + 2y^2 + y = y(2x+2y+1) & \text{(A)} \\ 0 &= f'_y &= x^2 + 4xy + x = x(x+4y+1) & \text{(B)} \end{cases}$$

   Från (B) får vi $x = 0$, som i (A) ger $y = 0$, eller $y = -1/2$ **eller** $x = -4y - 1$, som i (A) ger $0 = -6y - 1$ dvs $y = -1/6$ och $x = -2/6 = -1/3$ eller $y = 0$ och $x = -1$.

   Totalt får vi fyra stationära punkter: $(0,0)$, $(0,-1/2)$, $(-1,0)$ och $(-1/3, 1/6)$

	$(0,0)$	$(0,-1/2)$	$(-1,0)$	$(-1/3,-1/6)$
$f''_{xx} = 2y$	0	-1	0	$-1/3$
$f''_{xy} = 2x + 4y + 1$	1	-1	-1	$-1/3$
$f''_{yy} = 4x$	0	0	-4	$-4/3$

   Detta ger i $(0,0)$ den kvadratiska formen $Q = 2hk/2 = hk$ som är indefinit och $(0,0)$ är en sadelpunkt.

   I $(0,-1/2)$ är den kvadratiska formen $Q = -(h^2 + 2hk)/2 = -((h+k)^2 - k^2)/2$, som är indefinit. Vi har en sadelpunkt

   I $(-1,0)$ är den $Q = -(hk + 2k^2) = -(2(k + h/4)^2 - h^2/8)$ som är indefinit och $(-1,0)$ är en sadelpunkt.

   I $(-1/3,-1/6)$ blir det $Q = -(h^2 + 2hk + 4k^2)/3 = -((h+k)^2 + 3k^2)/3$, som är negativt definit, så vi har en lokal max-punkt.

   Svar: Sadelpunkter i $(0,0)$, $(-1,0)$ och $(0,-1/2)$. Lokal max-punkt i $(-1/3,-1/6)$.

3. Vi går över till polära koordinater $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ och får då området E som ges av $0 \le r \le 2$, $0 \le \phi \le \pi$.

   Vi får då

   $$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y)\,dx\,dy &= \iint_E (r^2\cos^2 t + r\sin t) r\,dr\,dt = \left\{\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2\right\} = \\ &= \int_0^2 \left[r^3\frac{t}{2} + r^3\frac{\sin 2t}{4} - r^2\cos t\right]_0^\pi dr = \\ &= \int_0^2 (\frac{\pi}{2}r^3 + 2r^2)\,dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 + 2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \\ &= 2\pi + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

   Svar: $2\pi + \dfrac{16}{3}$

4. Låt K beteckna kroppen. Vi ska då beräkna

   $$I = \iiint yz\,dx\,dy\,dz.$$

   Vi går över till sfäriska koordinater $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ och har att kroppen motsvars av D som ges av $0 \le r$, $0 \le \phi \le \pi/2$ och $0 \le \theta\pi/2$. Vi har då funktionaldeterminanten $r^2\sin\theta$.

Variabelbyte ger

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_E r\sin\phi\sin\theta\, r\cos\theta\, r^2\sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta = \\
&= \Big[\frac{r^5}{5}\Big]_0^1 \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/2} \Big[\frac{\sin^3\theta}{3}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}\cdot 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

Svar: 1/15

5. Kurvan är nivåkurvan $g(x,y) = 1$, där $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4$, som har gradienten $\nabla g = (4x, 2y)$.

   Lokala maxima och minima antas i punkter som löser

$$
\begin{cases} \nabla f \parallel \nabla g \\ g = 0 \end{cases}
$$

   Det första villkoret kan formuleras: matrisen med raderna $\nabla f = (1+y/2, -1/\sqrt{2}+x/2$ och ∇g ska ha determinant 0. Det blir då

$$
0 = \begin{vmatrix} 1+y/2 & -1/\sqrt{2}+x/2 \\ 4x & 2y \end{vmatrix} = 2y + y^2 + 2\sqrt{2}x - 2x^2 = (y+\sqrt{2}x)(y-\sqrt{2}x+2)
$$

   Vi ska alltså lösa

$$
\begin{cases} 0 = (y+\sqrt{2}x)(y-\sqrt{2}x+2) & \text{(A)} \\ 4 = 2x^2 + y^2 & \text{(B)} \end{cases}
$$

   Den översta ekvationen ger $y = -\sqrt{2}x$ eller $y = \sqrt{2}x - 2$.

   Det första alternativet ger i (B) $4 = 4x^2$ och $x = \pm 1$. Detta ger oss två punkter $(1, -\sqrt{2})$ och $(-1, \sqrt{2})$.

   Det andra alternativet ger i (B) $4 = 4x^2 - 4\sqrt{2}x + 4$, eller $0 = x(x - \sqrt{2})$, så $x = 0$ eller $x = \sqrt{2}$. Detta ger punkterna $(0, -2)$ och $(\sqrt{2}, 0)$.

   Vi beräknar nu

$$
\begin{aligned}
f(1,-\sqrt{2}) &= 2 - 1/\sqrt{2}, \\
f(-1,\sqrt{2}) &= -2 - 1/\sqrt{2}, \\
f(0,-2) &= \sqrt{2}, \\
f(\sqrt{2},0) &= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

   Vi har att $(2 - 1/\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2}-1)^2/2 = 9/2 - 2\sqrt{2})$

   Vi undersöker vilket som är störst av $2 - 1/\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}$ genom att sätta frågetecken som olikhet mellan dem. Vi får

$$
2 - 1/\sqrt{2} \ ?\ \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 1 \ ?\ 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \ ?\ 3
$$

   I $2\sqrt{2}\ ?\ 3$ ser vi att olikheten ska vara $<$ eftersom vänster led har kvadraten 8 medan höger har 9. Alltså är $2 - 1/\sqrt{2} < \sqrt{2}$

   Svar: Största värdet är $\sqrt{2}$ minsta är $-2 - \sqrt{2}/2$

6. Låt γ beteckna kurvan. Vi ser att $4 = x^2 + 2y^2$, så kurvan ligger på en cylinder i z-led över ellipsen $4 = x^2 + 2y^2$ i x, y-planet. Vi noterar att sista koordinaten för en normal till cylindern har z-koordinat som är 0.

   Vi beräknar rotationen för att om möjligt använda Stokes sats:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \left\{ \begin{matrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y + 4xy\arctan(z^2) & (8-4y^2)\arctan(z^2) & \dfrac{4x^2zy}{1+z^4} \end{matrix} \right\} = \\
&= \Big(\frac{(4x^2 - 16 + 8y^2)z}{1+z^4}, \frac{8xyz - 8xyz}{1+z^2}, -1 - 4x\arctan(z^2)\Big)
\end{aligned}
$$

Längs cylindern är $4x^2 + 8y^2 - 16 = 4(x^2 + 2y^2 - 4) = 0$ eftersom $4 = x^2 + 2y^2$ så $\text{rot}\,\mathbf{F} = (0, 0, -1 - 4x \arctan(z^2))$

Vi väljer nu Y som ytan på cylindern mellan ellipsen $4 = x^2 + 2y^2$ i x, y-planet (där $z = 0$) och kurvan i uppgiften, med utåtriktad normal. Normalens riktning ges av $(2x, 4y, 0)$, så $\text{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 0$

Då är $\partial Y = (-\gamma) + \sigma$ där σ är ellipsen i x, y-planet genomlöpt i positiv riktning. Enligt Stokes sats gäller

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{Y} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = 0.$$

Detta ger

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Kurvan σ är rand till ellipsskivan Y' med uppåtriktad normal, så Stokes sats ger igen

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{Y'} \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

Y' ligger i x, y -planet, där $z = 0$, så $\text{rot}\,F = (0, 0, -1)$ och $\text{rot}\,F \cdot \mathbf{N} = -1$ .Vi får nu

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\sigma} F \cdot d\mathbf{r} = \iint_{Y'} (-1)\, dS = -\text{Area}(Y') = -\pi \cdot 2\sqrt{2}$$

där vi använt att en ellipsskiva med ekvationen $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$ har arean πab och att Y' är skivan $(x/2)^2 + (y/\sqrt{2})^2 \leq 1$

Svar: $-2\sqrt{2}\pi$.

7. (b) Vi har $\nabla f = (2xy, x^2)$, så riktningsderivatan blir

$$\nabla f(1, 2) \cdot (3, -4)/\sqrt{3^2 + (-4)^2} = (4, 1) \cdot (3, -4)/5 = 8/5$$

Svar: 5/8

(c) Riktningsderivatan är störst i den riktning som ges av $\nabla f(1, 2) = (4, 1)$
Svar: $(4, 1)/\sqrt{17}$.