Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 10 06 07 (Fysikprogrammet)

1. En normal till tangentplanet ges av $(f'_x(1,2), f'_y(1,2), -1)$. Vi har $f'_x = 2xy + 3y$ och $f'_y = x^2 + 3x$, vilket ger normalen $(10, 4, -1)$, så tangentplanet har en ekvation av formen $10x + 4y - z = d$. Det går genom $(1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, 8)$, så $d = 10 + 8 - 8 = 10$.

   Svar: $10x + 4y - z = 10$.

2. Kurvan är en ellips och alltså en sluten och begränsad mängd i planet. Funktionen är kontinuerlig och antar därför säkert ett största och ett minsta värde på ellipsen.

   Sätt $g(x, y) = x^2 + 2y^2$. Punkter på ellipsen där f antar extremvärden löser då ekvationssystemet

$$\begin{cases} \text{grad} f \text{ parallell med grad} g \\ g = 3 \end{cases}$$

   Den fösta ekvationen kan skrivas

$$0 = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3+2x)/2 & (-3+2y) \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 6y + 4xy + 6x - 4xy = 6(x + y)$$

   Detta ger $y = -x$, som i andra ekvationen ger $x^2 + 2x^2 = 3$, d.v.s $x = \pm 1$. Vi får punkterna $(1, -1)$ och $(-1, 1)$. Funktionens värden i dessa är $f(1, -1) = 6$ och $f(-1, 1) = -3$

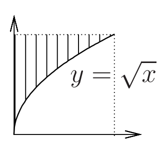
   Svar: Minsta värdet är -3 och det största är 6.

3. Det förslagna variabelbytet ger

$$\begin{aligned} f'_x &= f'_u \cdot a \\ f'_y &= f'_u \cdot 2y + f'_v \end{aligned}$$

   som ger $yf'_x + 2f'_y = f'_u(ay + 4y) + 2f'_v = 2f'_v$, om vi i väljer $a = -4$. Vi har då $x + y = (v^2 - u)/4 + v$ och får att den ursprungliga ekvationen blir $f'_v = v^2/8 + v/2 - u/8$ efter variabelbytet. Detta integreras till $f = v^3/24 + v^2/4 - uv/8 + g(u)$, där g är en godtycklig funktion av u. Återgång till ursprungliga variabler ger $f = y^3/24 + y^2/4 - (y^2 - 4x)y/8 + g(y^2 - 4x) = -y^3/12 + y^2/4 + xy/2 + g(y^2 - 4x)$. Detta kan också (enklare) skrivas $f = -y^3/2 + x + xy/2 + (y^2 - 4x)/4 + g(y^2 - 4x)$, eller $f = -y^3/2 + x + xy/2 + h(y^2 - 4x)$, där h är godtycklig.

   Svar: $f(x, y) = -y^3/12 + y^2/4 + xy/2 + g(y^2 - 4x)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion. (Eller $f = -y^3/2 + x + xy/2 + h(y^2 - 4x)$, där h är en godtycklig deriverbar funktion.)

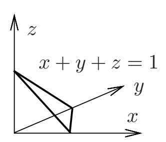
4. 

   Området kan också beskrivas av $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y^2$. Vi integrerar först med avseende på x och får

$$\int_0^1 \left[y^2 e^{xy} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 (y^2 e^{y^3} - y^2)\, dy =$$

$$= \left[e^{y^3}/3 - y^3/3 \right]_0^1 = e/3 - 2/3$$

   Svar: $(e - 2)/3$.

5. 

   Kroppen K är en pyramid. I z-led begränsas den av $z = 0$ och $z = 1 - x - y$ ovanför D som ges av $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$. Integration med avseende på z ger

$$\frac{1}{2} \iint_D (x + y)(1 - (x + y))^2\, dxdy$$

   För att underlätta gör vi variabelbytet $u = x$, $v = x + y$. Området D motsvaras då av

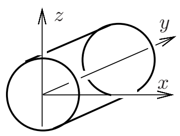
D' som ges av $0 \leq u \leq v$, $0 \leq v \leq 1$ och Jakobianen blir

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \text{abs}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Integralen blir då

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\iint_{D'} v(1-v)^2\,dudv &= \frac{1}{2}\int_0^1 v(1-v)^2(v-0)\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 (v^4 - 2v^3 + v^2)\,dv = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{v^5}{5} - \frac{v^4}{2} + \frac{v^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{60} \end{aligned}$$

Svar: 1/60.

6. 

Om Y betecknar cylindern ges flödet av $\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. En parametrisering av cylindern ges av $\mathbf{r}(s,t) = (\cos t, s \sin t)$ där $(s,t) \in D$ och D ges av $0 \leq s \leq 2$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Vi får

$$\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_s = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{array} \right\} = (\cos t, 0, \sin t)$$

som anger rätt riktning (bort från origo).
Med denna parametrisering blir därför flödet

$$\begin{aligned} \iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_D \cos^2(t) s(\cos t, s, \sin t) \cdot (\cos t, 0, \sin t)\,dsdt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt \cdot \int_0^2 s\,ds = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\,dt \cdot 2 = \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

Svar: 2π.

7. (b) För kontinuitet krävs att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ (speciellt att gränsvärdet existerar). Men $f(0,y) = 0$, när $y \neq 0$, så vi kan omöjligt ha den önskade likheten.
Svar: Funktionen är inte kontinuerlig i $(0,0)$.