Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 100821 (Fysikprogrammet)

1. En tangentvektor ges av grad$f \times$grad$g$ om vi sätter $f(x,y,z) = x\sin(yz)$ och $g(x,y,z) = 2y\cos(x+y)$. Vi har grad$f = (\sin(yz), zx\cos(yz), xy\cos(yz))$ och grad$g = (-2y\sin(x+y), 2\cos(x+y) - 2y\sin(x+y), 0)$. När $(x,y,z) = (-1,1,0)$ får vi

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right\} = (2,0,0)$$

som är parallell med $(1,0,0)$. En parametrisering av tangentlinjen ges därför av $(x,y,z) = (-1,1,0) + t(1,0,0)$

Svar: $(x,y,z) = (-1+t,1,0)$

2. Vi har

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{(xy-1) - y(x-y)}{(xy-1)^2} = \frac{y^2-1}{(xy-1)^2} \\ f'_y &= \frac{-(xy-1) - x(x-y)}{(xy-1)^2} = \frac{1-x^2}{(xy-1)^2} \end{aligned}$$

och vi ser att $(-1,1)$ verkligen är en stationär punkt. Vidare är

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \frac{-2y(y^2-1)}{(xy-1)^3} \\ f''_{xy} &= \frac{2y(xy-1)^2 - 2x(y^2-1)(xy-1)}{(xy-1)^4} = \frac{(2y(xy-1) - 2x(y^2-1)}{(xy-1)^3} = \frac{2(x-y)}{(xy-1)^3} \\ f''_{yy} &= -\frac{2x(1-x^2)}{(xy-1)^3} \end{aligned}$$

Detta ger oss att den kvadratiska formen för f i $(-1,1)$ ges av

$$Q(h,k) = \frac{1}{2}(0 \cdot h^2 + 2hk/2 + 0k^2) = hk/2,$$

som är indefinit. Punkten är alltså en sadelpunkt.

Svar: Sadelpunkt.

3. Området är inte begränsat, så vi kan inte vara säkra på att största och minsta värde finns trots att f är kontinuerlig.

Vi konstaterar genast att $f \geq 0$ och att vi har likhet i origo, så minsta värde finns och antas (t.ex.) där.

Vi söker stationära punkter i det inre och deriverar:

$$\begin{aligned} f'_x &= (2xy - x^2y^2)e{-}xy = xy(2-xy)e^{-xy} \\ f'_y &= (x^2 - x^3y)e^{-xy} = x^2(1-xy)e^{-xy} \end{aligned}$$

För att dessa ska vara 0 i det inre krävs i andra ekvationen att $xy = 1$, och $xy = 2$ i den första. Alltså saknas stationära punkter i det inre av området.

Vi fixerar $x = a$ $(0 \leq a \leq 2)$ och får funktionen $f(a,y) = a^2ye^{-ay}$ som har derivata (med avseende på y) $a^2(1-ay)e^{-ay}$ som växlar tecken från positivt till negativt i $y = 1/a$. Dess största värde är därför ae^{-1} som blir störst när $a = 2$. Största värdet finns därför och är $2e^{-1}$ (och antas i $(2,1/2)$).

Svar: Största värdet är $2e^{-1}$ och det minsta är 0.

4. Övergång till polära koordinater ger att vi ska beräkna

$$\iint'_D \frac{r\cos t + r\sin t}{1+r^2} r\,drdt$$

där D' ges av $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq t \leq \pi/4$.

Vi får

$$\begin{aligned}\iint'_D \frac{r\cos t + r\sin t}{1+r^2} r\, drdt &= \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\, dr \int_0^{\pi/4} (\cos t + \sin t)\, dt = \\ &= \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+r^2}\Big)\, dr \Big[\sin t - \cos t\Big]_0^{\pi/4} = \Big[r - \arctan r\Big]_0^1 = 1 - \pi/4\end{aligned}$$

5. Vektorfältets divergens är $y+1+1 = 2+y$. Divergenssatsen ger att flödet kan beräknas av

$$\iiint_K (2+y)\, dxdydz,$$

där K är enhetssfären. Övergång till sfäriska koordinater ger att vi ska beräkna

$$\iiint'_K (2 + r\sin\phi \sin\theta) r^2 \sin\theta\, drd\phi d\theta,$$

Vi får

$$\begin{aligned}&\iiint_{K'} 2r^2 sin\theta\, drd\phi d\theta + \iiint_{K'} r^3 \sin\phi \sin^2\theta\, drd\phi d\theta = \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

Svar: $\frac{4\pi}{3}$.

6. Vi ska beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \Big(\cos t \sin t(-\sin t) + (\sin t + t)\cos t - t\cos t\Big)\, dt = \Big[-\frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{1}{2}\sin^2 t\Big]_0^{2\pi} = 0$$

Svar: 0.

7. (b) Vektorfältet $F(x,y) = (y,0)$ saknar potential eftersom $\partial y/\partial y = 1$, medan $\partial 0/\partial x = 0$.
   Sätt $f(x,y) = x^2 + y^2$, då är f en potential till vektorfältet grad$f = (2x, 2y)$.
   Svar: (T.ex.) $F(x,y) = (2x, 2y)$ respektive $F(x,y) = (y,0)$