Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 11 03 10 (Fysikprogrammet)

1. En normalvektor ges av $\mathbf{n} = \text{grad} f(-1,2,-1)$, där $f(x,y,z)) = xy+xy^2-z^2$, eftersom ytan är nivåytan $f(x,y,z) = -7$. Vi har $\text{grad} f = (y+y^2, x+2xy, -2z)$ som i $(-1,2,-1)$ blir $\mathbf{n} = (6,-5,2)$. Ekvationen för tangentplanet blir därför
$0 = (6,-5,2)\cdot(x-(-1), y-2, z-(-1)) = 6x-5y+2z+18$.

   Svar: $0 = 6x-5y+2z+18$.

2. Vi har

$$\begin{aligned} f'_x &= f'_u a + f'_v \cdot 0 \\ f'_y &= f'_u \cdot 2y + f'_v. \end{aligned}$$

   Detta ger att vänstra ledet blir $yf'_x - 2f'_y = (ay-4y)f'_u - 2f'_v$. Väljer vi $a = 4$ blir detta $-2f'_v$.

   Med $a = 4$ har vi $x = (u-y^2)/4 = (u-v^2)/4$, så högra ledet blir $x+y = (u-v^2)/4+v$ och vi får differentialekvationen $f'_v = -u/8 - v/2 + v^2/8$.

   Integration ger $f = -uv/8 - v^2/4 + v^3/24 + g(u)$, där $g(u)$ är en godtycklig deriverbar funktion. Återgång till gamla variabler ger

   $f(x,y) = -(4x+y^2)y/8 - y^2/4 + y^3/24 + g(4x+y^2) = -xy/2 - y^2/4 - y^3/12 + g(4x+y^2)$.

   Svar: $f(x,y) = -xy/2 - y^2/4 - y^3/12 + g(4x+y^2)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.

3. Vi har $f'_x = 2x+3y+y^2$, $f'_y = 3x+2xy$, $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 3+2y$ och $f''_{yy} = 2x$.

   Vi söker stationära punkter genom att lösa (A) $0 = f'_x$ och (B) $0 = f'_y = x(3+2y)$. Här ger (B) att $x = 0$, eller $y = -3/2$. $x = 0$ ger i (A) att $0 = y(3+y)$, dvs $y = 0$, eller $y = -3$. Detta ger de stationära punkterna $(0,0)$ och $(0,-3)$. $y = -3/2$ ger i (A) $0 = 2x - 9/2 + 9/4$, dvs $x = 9/8$. Vi får en tredje stationär punkt $(9/8, -3/2)$.

   I $(0,0)$ har vi $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 3$ och $f''_{yy} = 0$, vilket ger den kvadratiska formen $Q(h,k) = 2h^2 + 6hk$. Den är indefinit för t.ex. $Q(1,-1) < 0$ och $Q(1,1) > 0$. Alltså är $(0,0)$ en sadelpunkt.

   I $(0,-3)$ har vi $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = -3$ och $f''_{yy} = 0$, vilket ger den kvadratiska formen $Q(h,k) = 2h^2 - 6hk$. Den är indefinit för t.ex. $Q(1,1) < 0$ och $Q(1,-1) > 0$. Alltså är $(0,-3)$ en sadelpunkt.

   I $(9/8,-3/2)$ har vi $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 0$ och $f''_{yy} = 9/4$, vilket ger den kvadratiska formen $Q(h,k) = 2h^2 + 9k^2/4$. Den är positivt definit för den är summan av två kvadrater och därför ≥ 0, och $= 0$ bara när $h = 0 = k$. Alltså är $(9/8,-3/2)$ en lokal minimipunkt till f.

   Svar: De stationära punkterna är sadelpunkterna $(0,0)$ och $(0,-3)$ samt den lokala minimipunkten $(9/8,-3/2)$.

4. Vi har att $x = y^2$ i $0 = x+y-2$ ger $0 = y^2+y-2 = (y-1)(y+2)$, dvs kurvorna skärvarandra när $y = 1$ (och $x = 1$) samt $y = -2$ (och $x = 4$).

   Vi ser att D är instängt mellan kurvorna $x = 2-y$ och $x = y^2$, där $-2 \leq y \leq 1$. Där gäller att $y^2 \leq 2-y$.

   Vi integrerar därför först med avseende på x och sedan med avseende på y:

$$\begin{aligned} \iint_D (x-2)y\,dxdy &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \Big[(x-2)^2 y\Big]_{x=y^2}^{x=2-y} dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \Big(y^3 - y^5 + 4y^3 - 4y\Big)\,dy = \\ &= \frac{1}{2}\Big[y^4/4 - y^6/6 + y^4 - 2y^2\Big]_{-2}^{1} = \frac{1}{2}(-15/4 + 63/6 - 15 + 6) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot(-45+126-108)/12 = -27/(2\cdot 12) = -9/8. \end{aligned}$$

   Svar: $-9/8$.

5. Vektorfältets divergens är $2xyz^2 + 2xyz^2 + 2xyz^2 = 7xyz^2$. Om K är den del av enhetsklotet som ligger i första oktanten har det en rand som består av Y och tre ytor till: Y_1, Y_2, Y_3 som är skärningen mellan K och x, y-planet, x, z-planet respektive y, z-planet. Om vi orienterar randen till K positivt (utåtpekande normal) stämmer orienteringen på Y.

   På ytorna Y_1 och Y_2 och Y_3 är en av de tre koordinaterna 0 och där med är $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ på dem, så
$$0 = \iint_{Y_1} = \iint_{Y_2} = \iint_{Y_3}.$$
   Divergensatsen ger
$$\iint_Y = \iint_Y + \iint_{Y_1} + \iint_{Y_2} + \iint_{Y_3} = \iint_{\partial K} = 7 \iiint_K xyz^2 \, dxdydz.$$
   Övergång till rymdpolära koordinater ger (där $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$ och $0 \le \phi \le \pi/2$)
$$\begin{aligned} 7 \iiint_K xyz^2 xyz^2 \, dxdydz &= 7 \iiint r^4 \cos\phi \sin\phi \cos^2\theta \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \, drd\theta d\phi = \\ &= \Big[r^7\Big] \left[\frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_0^1 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta (1 - \cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\cos^5\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$
   Svar: Flödet blir 1/15.

6. Kurvan är snittet mellan en parabolisk cylinder (i x-led) och en kon med spets i origo och lodlinje längs z-axeln. Det betyder att kurvan är randen till den del av konen som ligger "under" den. Vi kallar denna yta Y. En normal $\mathbb{N}$ till konen ges av (en normering av) grad$F$, där $F = x^2 + y^2 - z^2$, eftersom konen är nivåytan $F = 0$. Vi har grad$F = (2x, 2y, -2z)$, som har riktning "nedåt". Med denna orientering av Y är $-\gamma$ den positivt orienterade randen till Y.

   Vi har
$$\mathrm{rot}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{matrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & y(e^{z^2} + 2x) & y^2 z e^{z^2} \end{matrix} \right\} = (2yze^{z^2} - 2yze^{z^2}, 2z, 2y) = (0, 2z, 2y)$$
   Vi observerar att $\mathrm{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathrm{grad}F = 0$, vilket även gäller om grad$F$ ersätts med sin normering $\mathbb{N}$. Stokes sats ger därför
$$\int_\gamma = -\int_{-\gamma} = -\iint_Y \mathrm{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbb{N} \, dS = 0$$
   Svar: 0.

7. (b) Vektorfältet $\mathbb{F}$ saknar potential eftersom $(xy)'_y = x$, medan $(\cos xy)'_x = -y \sin xy$ inte är lika i första kvadranten.

   Svar: Nej.

8. (b) Lineariseringen är $f(2, 1) + \mathrm{grad}f(2, 1)(x - 2, y - 1)$. Vi har $\mathrm{grad}f = (2xy, x^2)$ som i $(2, 1)$ blir $(4, 4)$. Lineariseringen blir därför $4 + 4(x - 2) + 4(y - 1)$.

   Svar: $-8 + 4x + 4y$.

   (c) Den växer snabbast i den riktning som ges av $\mathrm{grad}f(2, 1) = (4, 4)$.

   Svar: $(1/\sqrt{2})(1, 1)$